

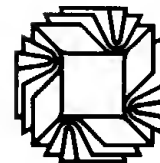
**GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI**

FUNDAMENTOS DE
MATEMÁTICA
ELEMENTAR
CONJUNTOS FUNÇÕES

1

75 Exercícios resolvidos
326 Exercícios propostos – com resposta
272 Testes de Vestibulares – com resposta

3ª edição



**ATUAL
EDITORA**

Capa

Roberto Franklin Rondino
Sylvio Ulhoa Cintra Filho
Rua Inhambu, 1235 — S. Paulo

Composição e desenhos

AM Produções Gráficas Ltda.
Rua Castro Alves, 135 — S. Paulo

Artes

Atual Editora Ltda.

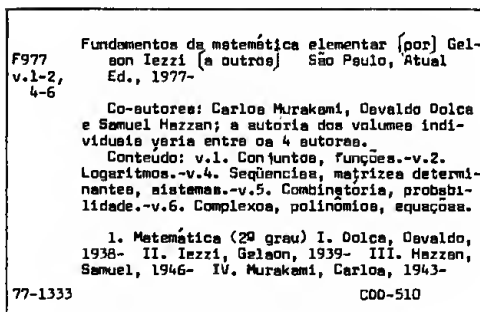
Fotolitos

H.O.P. Fotolitos Ltda.
Rua Delmira Ferreira, 325 — S. Paulo

Impressão e acabamento

Gráfica Editora Hamburg Ltda.
Rua Apeninos, 294
278-1620 — 278-2648 — 279-9776
São Paulo — SP — Brasil

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP



Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

Todos os direitos reservados a
ATUAL EDITORA LTDA
Rua José Antônio Coelho, 785
Telefones: 71-7795 e 549-1720
CEP 04011 — São Paulo — SP — Brasil

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colegial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colegial mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A sequência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e, assim, ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

CAPÍTULO I – NOÇÕES DE LÓGICA

I. Proposição	1-A
II. Negação	2-A
III. Proposição composta – conectivos	3-A
IV. Condicionais	5-A
V. Tautologias	8-A
VI. Proposições logicamente falsas	9-A
VII. Relação de implicação	10-A
VIII. Relação de equivalência	11-A
IX. Sentenças abertas	12-A
X. Como negar proposições	14-A

CAPÍTULO II – CONJUNTOS

I. Conjunto, elemento, pertinência	19-A
II. Descrição de um conjunto	20-A
III. Conjunto unitário, conjunto vazio	22-A
IV. Conjunto universo	23-A
V. Conjuntos iguais	25-A
VI. Subconjuntos	26-A
VII. Reunião de conjuntos	29-A
VIII. Intersecção de conjuntos	30-A
IX. Propriedades	31-A
X. Diferença de conjuntos	33-A
XI. Complementar de B em A	33-A

CAPÍTULO III – CONJUNTOS NUMÉRICOS

I. Conjunto dos números naturais	39-A
II. Conjunto dos números inteiros	40-A
III. Conjunto dos números racionais	43-A
IV. Conjunto dos números reais	46-A
V. Intervalos	49-A
VI. Conjunto dos números complexos	52-A
VII. Resumo	52-A
VIII. Princípio da indução finita	53-A

CAPÍTULO IV – RELAÇÕES

I. Par ordenado	59-A
II. Sistema cartesiano ortogonal	60-A
III. Produto cartesiano	62-A
IV. Relação binária	65-A
V. Domínio e imagem	68-A
VI. Relação inversa	70-A
VII. Propriedades	71-A

CAPÍTULO V – FUNÇÕES

I. Conceito de função	73-A
II. Definição	74-A
III. Notação das funções	77-A
IV. Domínio e imagem	80-A
V. Funções iguais	84-A
APÊNDICE SOBRE INEQUAÇÕES	86-A

CAPÍTULO VI – FUNÇÕES DO 1º GRAU

I. Função constante	93-A
II. Função identidade	94-A
III. Função linear	94-A
IV. Função afim	96-A
V. Gráfico	96-A
VI. Imagem	100-A
VII. Coeficientes da função afim	101-A
VIII. Zero da função afim	102-A
IX. Funções crescentes e decrescentes	103-A
X. Teorema	105-A
XI. Sinal de uma função	106-A
XII. Sinal da função afim	108-A
XIII. Inequações simultâneas	112-A
XIV. Inequações-produto	113-A
XV. Inequações-quociente	120-A

CAPÍTULO VII – FUNÇÃO QUADRÁTICA

I. Definição	123-A
II. Parábola	123-A
III. Concavidade	125-A
IV. Forma canônica	125-A
V. Zeros	126-A

VI. Máximos e mínimos	130-A
VII. Vértice da parábola	131-A
VIII. Imagem	133-A
IX. Eixo de simetria	136-A
X. Gráfico	136-A
XI. Sinal	140-A
XII. Inequações do 2º grau	144-A
XIII. Teorema	148-A
XIV. Comparação de um número real com as raízes da equação do 2º grau	150-A
XV. Sinais das raízes da equação do 2º grau	155-A

CAPÍTULO VIII – FUNÇÃO MODULAR

I. Função definida por várias sentenças abertas	159-A
II. Módulo	161-A
III. Função modular	161-A
IV. Equações modulares	166-A
V. Inequações modulares	168-A

CAPÍTULO IX – OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

I. Função $f(x) = x^3$	171-A
II. Função recíproca	172-A
III. Função máximo inteiro	177-A

CAPÍTULO X – FUNÇÃO COMPOSTA – FUNÇÃO INVERSA

I. Função composta	181-A
II. Função sobrejetora	187-A
III. Função injetora	188-A
IV. Função bijetora	189-A
V. Função inversa	195-A

APÊNDICE I

Equações irracionais	208-A
----------------------	-------

APÊNDICE II

Inequações irracionais	217-A
------------------------	-------

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS	225-A
--------------------------	-------

TESTES	269-A
--------	-------

RESPOSTAS DE TESTES	315-A
---------------------	-------



Johann F. C. Gauss
(1777 - 1855)

De plebeu a príncipe

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha. De família humilde mas com o incentivo de sua mãe obteve brilhantismo em sua carreira.

Estudando em sua cidade natal, certo dia quando o professor mandou que os alunos somassem os números de 1 a 100, imediatamente Gauss achou a resposta — 5050 — aparentemente sem cálculos. Supõe-se que já aí houvesse descoberto a fórmula de uma soma de uma progressão aritmética.

Gauss foi para Göttingen sempre contando com o auxílio financeiro do duque de Brunswick, decidindo-se pela Matemática em 30 de março de 1796, quando se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxílio de régua e compasso.

Gauss doutorou-se em 1798, na Universidade de Helmstädt e sua tese foi a demonstração do “Teorema fundamental da Álgebra”, provando que toda equação polinomial $f(x)=0$ tem pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações geométricas.

Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.

Seu livro “*Disquisitiones Arithmeticae*” (Pesquisas Aritméticas) é o principal responsável pelo desenvolvimento e notações da Teoria dos Números, nele apresentando a notação $b \equiv c \pmod{a}$, para relação de congruência, que é uma relação de equivalência.

Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei da reciprocidade quadrática classificada por ele como a “jóia da aritmética” e demonstrando o teorema segundo o qual todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos.

Descreveu uma vez a Matemática como sendo a rainha das Ciências e a Aritmética como a rainha da Matemática.

No começo do séc. XIX abandonou a Aritmética para dedicar-se à Astronomia, criando um método para acompanhar a órbita dos satélites, usado até hoje, e isto lhe proporcionou em 1807, o cargo de diretor do observatório de Göttingen, onde passou 40 anos.

Suas pesquisas matemáticas continuaram em teoria das funções e Geometria aplicada à teoria de Newton.

Em Geodésia inventou o helitropo, aparelho que transmite sinais por meio de luz refletida e em Eletromagnetismo inventou o magnetômetro bifilar e o telégrafo elétrico.

Sua única ambição era o progresso da Matemática pelo que lutou até o momento em que se conscientizou do fim por sofrer de dilatação cardíaca.

Gauss morreu aos 78 anos e é considerado o “príncipe da Matemática”.

CAPÍTULO I

NOÇÕES DE LÓGICA

I. PROPOSIÇÃO

1. Definição

Chama-se *proposição* ou *sentença* toda oração declarativa que pode ser classificada de verdadeira ou de falsa.

Observemos que toda proposição apresenta três características obrigatórias:

1ª) sendo oração, tem sujeito e predicado;

2ª) é declarativa (não é exclamativa nem interrogativa)

3ª) tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

2. Exemplos

São proposições:

a) $9 \neq 5$ (Nove é diferente de cinco)

b) $7 > 3$ (Sete é maior que três)

c) $2 \in \mathbb{Z}$ (Dois é um número inteiro)

d) $3 \mid 11$ (Três é divisor de 11)

e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos racionais)

Dessas proposições, todas são verdadeiras exceto d.

Não são consideradas proposições as frases:

f) $3 \cdot 5 + 1$ (onde falta predicado)

g) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}?$ (que é oração interrogativa)

h) $3x - 1 = 11$ (que não pode ser classificada em verdadeira ou falsa)

II. NEGAÇÃO

3. A partir de uma proposição p qualquer sempre podemos construir outra, denominada *negação de p* e indicada com o símbolo $\sim p$.

Exemplos

- | | |
|---|----------------------|
| a) $p: 9 \neq 5$ | b) $p: 7 > 3$ |
| $\sim p: 9 = 5$ | $\sim p: 7 \leq 3$ |
| c) $p: 2 \in \mathbb{Z}$ | d) $p: 3 \mid 11$ |
| $\sim p: 2 \notin \mathbb{Z}$ | $\sim p: 3 \nmid 11$ |
| e) $p: \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ | |
| $\sim p: \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q}$ | |

4. Para que $\sim p$ seja realmente uma proposição devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira (V) ou falsa (F). Para isso vamos postular (decretar) o seguinte critério de classificação:

A proposição $\sim p$ tem sempre o valor oposto de p , isto é, $\sim p$ é verdadeira quando p é falsa e $\sim p$ é falsa quando p é verdadeira.

Este critério está resumido na tabela ao lado, denominada *tabela-verdade* da proposição $\sim p$.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Assim, reexaminando os exemplos anteriores, temos que $\sim p$ é verdadeira no exemplo d e $\sim p$ é falsa nos demais.

EXERCÍCIOS

A.1 Quais das sentenças abaixo são proposições? No caso das proposições quais são verdadeiras?

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $5 \cdot 4 = 20$ | b) $5 - 4 = 3$ |
| c) $2 + 7 \cdot 3 = 5 \cdot 4 + 3$ | d) $5(3 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1$ |
| e) $1 + 3 \neq 1 + 6$ | f) $(-2)^5 \geq (-2)^3$ |
| g) $3 + 4 > 0$ | h) $11 - 4 \cdot 2$ |

A.2 Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Que negações são verdadeiras?

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $3 \cdot 7 = 21$ | b) $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$ |
| c) $3 \cdot 2 + 1 > 4$ | d) $5 \cdot 7 - 2 \leq 5 \cdot 6$ |
| e) $(\frac{1}{2})^7 < (\frac{1}{2})^3$ | f) $\sqrt{2} < 1$ |
| g) $-(-4) \geq 7$ | h) $3 \mid 7$ |

III. PROPOSIÇÃO COMPOSTA – CONECTIVOS

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos: conectivo \wedge (lê-se: e) e o conectivo \vee (lê-se: ou).

5. Conectivo \wedge

Colocando o conectivo \wedge entre duas proposições p e q , obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada *conjunção* das sentenças p e q .

Exemplos

- 1º) $p: 2 > 0$
 $q: 2 \neq 1$
 $p \wedge q: 2 > 0 \text{ e } 2 \neq 1$

- 2º) $p: -2 < -1$
 $q: (-2)^2 < (-1)^2$
 $p \wedge q: -2 < -1 \text{ e } (-2)^2 < (-1)^2$

- 3º) $p: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem diagonal medindo } 2a$
 $q: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem área } a^2$
 $p \wedge q: \text{um quadrado de lado } a \text{ tem diagonal medindo } 2a \text{ e área } a^2.$

- 4º) $p: 2 \mid 5$ (2 é divisor de 5)
 $q: 3 \mid 5$ (3 é divisor de 5)
 $p \wedge q: 2 \mid 5 \text{ e } 3 \mid 5$ (2 e 3 são divisores de 5).

6. Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma conjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q :

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Este critério está resumido na tabela ao lado, onde são examinadas todas as possibilidades para p e q . Esta tabela é denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reexaminando os exemplos anteriores, temos:

- 1º) p é V e q é V, então $p \wedge q$ é V
- 2º) p é V e q é F, então $p \wedge q$ é F
- 3º) p é F e q é V, então $p \wedge q$ é F
- 4º) p é F e q é F, então $p \wedge q$ é F

7. Conectivo \vee

Colocando o conectivo \vee entre duas proposições p e q , obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada *disjunção* das sentenças p e q .

Exemplos

- 1º) $p: 5 > 0$
 $q: 5 > 1$
 $p \vee q: 5 > 0$ ou $5 > 1$

- 2º) $p: 3 = 3$
 $q: 3 < 3$
 $p \vee q: 3 \leq 3$

- 3º) $p: 10$ é número primo
 $q: 10$ é número composto
 $p \vee q: 10$ é número primo ou número composto

- 4º) $p: 3^4 < 2^6$
 $q: 2^2 < (-3)^5$
 $p \vee q: 3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$

8. Vamos postular um critério para decidir o valor lógico (V ou F) de uma disjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q :

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Este critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Reverendo os exemplos anteriores, temos:

- 1º) p é V e q é V, então $p \vee q$ é V
- 2º) p é V e q é F, então $p \vee q$ é V
- 3º) p é F e q é V, então $p \vee q$ é V
- 4º) p é F e q é F, então $p \vee q$ é F

EXERCÍCIO

A.3 Classificar em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas:

- a) $3 > 1$ e $4 > 2$
- b) $3 > 1$ ou $3 = 1$
- c) $2 \mid 4$ ou $2 \mid (4 + 1)$
- d) $3(5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ e $3 \mid 7$
- e) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $5 \mid 11$
- f) $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$
- g) $\sqrt{16} = 6$ ou $\text{mdc}(4, 7) = 2$

IV. CONDICIONAIS

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições através do emprego de outros dois símbolos lógicos chamados condicionais: o condicional se ... então ... (símbolo: \rightarrow) e o condicional ... se e somente se ... (símbolo: \leftrightarrow)

9. Condicional \rightarrow

Colocando o condicional \rightarrow entre duas proposições p e q , obtemos uma nova proposição, $p \rightarrow q$, que se lê: "se p então q ", " p é condição necessária para q ", " q é condição suficiente para p ".

Exemplos

- 1º) $p: 2 \mid 4$
 $q: 4 \mid 12$
 $p \rightarrow q: 2 \mid 4 \rightarrow 4 \mid 12$
- 2º) $p: 10 = 5 \cdot 2$
 $q: 3 \mid 10$
 $p \rightarrow q: 10 = 5 \cdot 2 \rightarrow 3 \mid 10$
- 3º) $p: 5 < 2$
 $q: 2 \in \mathbb{Z}$
 $p \rightarrow q: 5 < 2 \rightarrow 2 \in \mathbb{Z}$
- 4º) $p: 7 \leq 3$
 $q: 3 = 6 \cdot 2$
 $p \rightarrow q: 7 \leq 3 \rightarrow 3 = 6 \cdot 2$

10. Vamos postular um critério de classificação para a proposição $p \rightarrow q$ baseado nos valores lógicos de p e q :

O condicional $p \rightarrow q$ é falso somente quando p é verdadeira e q é falsa; caso contrário, $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

Este critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

- 1º) p é V e q é V, então $p \rightarrow q$ é V
 2º) p é V e q é F, então $p \rightarrow q$ é F
 3º) p é F e q é V, então $p \rightarrow q$ é V
 4º) p é F e q é F, então $p \rightarrow q$ é V

11. Condicional \leftrightarrow

Colocando o condicional \leftrightarrow entre duas proposições p e q , obtemos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, que se lê: " p se e somente se q ", " p é condição necessária e suficiente para q ", " q é condição necessária e suficiente para p " ou "se p então q e reciprocamente".

Exemplos

- 1º) $p: 2 \mid 12$
 $q: 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$
 $p \leftrightarrow q: 2 \mid 12 \leftrightarrow 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$
- 2º) $p: \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$
 $q: 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$
 $p \leftrightarrow q: \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \leftrightarrow 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$
- 3º) $p: 6 = 12 : 3$
 $q: 3 \cdot 6 = 18$
 $p \leftrightarrow q: 6 = 12 : 3 \leftrightarrow 3 \cdot 6 = 18$
- 4º) $p: 4 \leq 3$
 $q: 4 \cdot 5 \leq 3 \cdot 5$
 $p \leftrightarrow q: 4 \leq 3 \leftrightarrow 4 \cdot 5 \leq 3 \cdot 5$

12. Vamos postular para o condicional $p \leftrightarrow q$ o seguinte critério de classificação:

O condicional \leftrightarrow é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer o condicional \leftrightarrow é falso.

Assim, a tabela-verdade da proposição $p \leftrightarrow q$ é a que está ao lado.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Reverendo os exemplos dados, temos:

- 1º) p é V e q é V , então $p \leftrightarrow q$ é V
 2º) p é V e q é F , então $p \leftrightarrow q$ é F
 3º) p é F e q é V , então $p \leftrightarrow q$ é F
 4º) p é F e q é F , então $p \leftrightarrow q$ é V

EXERCÍCIOS

A.4 Classificar em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo

- a) $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$
 b) $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$
 c) $5 + 7 \cdot 1 = 10 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$
 d) $\text{mdc}(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$ é número primo
 e) $2 \mid 8 \rightarrow \text{mmc}(2, 8) = 2$
 f) $6 \leq 2 \leftrightarrow 6 - 2 \geq 0$
 g) $\frac{3}{5} < \frac{2}{7} \rightarrow 3 \cdot 7 = 2 \cdot 5$

A.5 Admitindo que p e q são verdadeiros e r é falsa, determine o valor (V ou F) de cada proposição abaixo.

- a) $p \rightarrow r$
 b) $p \leftrightarrow q$
 c) $r \rightarrow p$
 d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$
 e) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
 f) $p \rightarrow (q \vee r)$
 g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$
 h) $\sim p \leftrightarrow r$

V. TAUTOLOGIAS

13. Seja v uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, \dots), mediante emprego de conectivos (\vee ou \wedge) ou de modificador (\sim) ou de condicionais (\rightarrow ou \leftrightarrow). Dizemos que v é uma tautologia ou proposição logicamente verdadeira quando v tem o valor lógico V (verdadeira) independentemente dos valores lógicos de p, q , etc.

Assim a tabela-verdade de uma tautologia v apresenta só V na coluna de v .

Exemplos

1º) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$ é uma tautologia pois

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2º) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ é uma tautologia pois

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

VI. PROPOSIÇÕES LOGICAMENTE FALSAS

14. Seja f uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, \dots), mediante emprego de conectivos (\vee ou \wedge) ou de modificador (\sim) ou de condicionais (\rightarrow ou \leftrightarrow). Dizemos que f é uma proposição logicamente falsa quando f tem o valor lógico F (falsa) independentemente dos valores lógicos de p, q , etc.

Assim, a tabela-verdade de uma proposição logicamente falsa f apresenta só F na coluna de f .

Exemplos

1º) $p \wedge \sim p$ é proposição logicamente falsa pois:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

$$2^{\circ}) (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

VII. RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO

15. Dadas as proposições p e q, dizemos que "p implica q" quando na tabela de p e q não ocorre VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente p verdadeira e q falsa.

Quando p implica q, indicamos $p \Rightarrow q$.

16. Observações

1ª) Notemos que p implica q quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema é uma implicação da forma

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}$$

Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso da hipótese ser verdadeira e a tese falsa.

17. Exemplos

$$1^{\circ}) 2 \mid 4 \Rightarrow 2 \mid 4 \cdot 5$$

significa dizer que o condicional "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de $4 \cdot 5$ " é verdadeiro.

$$2^{\circ}) p \text{ é positivo e primo} \Rightarrow \text{mdc}(p, p^2) = p$$

quer dizer que o condicional "se p é número primo e positivo, então o máximo divisor comum de p e p^2 é p", é verdadeiro.

VIII. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

18. Dadas as proposições p e q, dizemos que "p é equivalente a q" quando p e q têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando p e q têm sempre o mesmo valor lógico.

Quando p é equivalente a q, indicamos: $p \Leftrightarrow q$.

19. Observações

1ª) Notemos que p equivale a q quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência
 $\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$

20. Exemplos

$$1^{\circ}) (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

2ª) $2 \mid 8 \Leftrightarrow \text{mdc}(2, 8) = 2$ significa dizer que é verdadeiro o bicondicional "2 é divisor de 8 se, e somente se, o máximo divisor comum de 2 e 8 é 2".

EXERCÍCIO

A.6 Verificar, através das tabelas-verdades, a validade das equivalências abaixo:

a) da conjunção

$$\begin{aligned} p \wedge q &\Leftrightarrow q \wedge p \\ (p \wedge q) \wedge r &\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \\ p \wedge p &\Leftrightarrow p \\ p \wedge v &\Leftrightarrow p \\ p \wedge f &\Leftrightarrow f \end{aligned}$$

b) da disjunção

$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow q \vee p \\ (p \vee q) \vee r &\Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ p \vee p &\Leftrightarrow p \\ p \vee v &\Leftrightarrow v \\ p \vee f &\Leftrightarrow p \end{aligned}$$

c) da conjunção relativamente à disjunção

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (p \vee q) &\iff p \\ p \vee (p \wedge q) &\iff p \end{aligned}$$

d) da negação

$$\begin{aligned} \sim(\sim p) &\iff p \\ \sim(p \wedge q) &\iff \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) &\iff \sim p \wedge \sim q \end{aligned}$$

onde p, q, r são proposições quaisquer, v é uma tautologia e f uma proposição logicamente falsa.

IX. SENTENÇAS ABERTAS, QUANTIFICADORES

21. Há expressões como:

- a) $x + 1 = 7$
- b) $x > 2$
- c) $x^3 = 2x^2$

que contêm variáveis e cujo valor lógico (verdadeira ou falsa) vai depender do valor atribuído à variável.

Nos exemplos citados temos:

- a) $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x ;
- b) $x > 2$ é verdadeira, por exemplo, para
- c) $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2 ($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x .

22. Sentenças que contêm variáveis são chamadas *funções proposicionais* ou *sentenças abertas*. Tais sentenças não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado às variáveis.

Há, entretanto, duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

- 1ª) atribuir valor às variáveis
- 2ª) utilizar quantificadores.

23. O quantificador universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo \forall que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplos

1º) $(\forall x)(x + 1 = 7)$ que se lê:
"qualquer que seja o número x , temos $x + 1 = 7$ ". (Falsa)

2º) $(\forall x)(x^3 = 2x^2)$ que se lê:
"para todo número x , $x^3 = 2x^2$ ". (Falsa)

3º) $(\forall a)((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ que se lê:
"qualquer que seja o número a , temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ". (Verdadeira)

4º) $(\forall y)(y^2 + 1 > 0)$ que se lê:
"para todo número y , temos $y^2 + 1$ positivo". (Verdadeira)

24. O quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo \exists que se lê: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

Exemplos

1º) $(\exists x)(x + 1 = 7)$ que se lê:
"existe um número x tal que $x + 1 = 7$ ". (Verdadeira)

2º) $(\exists x)(x^3 = 2x^2)$ que se lê:
"existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$ ". (Verdadeira)

3º) $(\exists a)(a^2 + 1 \leq 0)$ que se lê:
"existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo". (Falsa).

4º) $(\exists m)(m(m + 1) \neq m^2 + m)$ que se lê:
"existe pelo menos um número m tal que $m(m + 1) \neq m^2 + m$ ". (Falsa)

25. Algumas vezes utilizamos também outro quantificador: $\exists!$ que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".

Exemplos

1º) $(\exists! x)(x + 1 = 7)$ que se lê:
"existe um só número x tal que $x + 1 = 7$ ". (Verdadeira)

2º) $(\exists! x)(x^3 = 2x^2)$ que se lê:
"existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$ ". (Falsa)

3º) $(\exists! x)(x + 2 > 3)$ que se lê:
"existe um só número x tal que $x + 2 > 3$ ". (Falsa)

EXERCÍCIO

A.7 Transforme as seguintes sentenças abertas em proposições verdadeiras usando quantificadores:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$

c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}$

d) $\sqrt{m^2} + 9 \neq m + 3$

e) $-(-x) = x$

f) $5a + 4 \leq 11$

g) $\sqrt{x^2} = x$

h) $\frac{a^2 - a}{a} = a - 1$

X. COMO NEGAR PROPOSIÇÕES

Já vimos o que é a negação de uma proposição simples, no item II deste capítulo.

Vamos destacar aqui resultados obtidos no exercício A.6, os quais constituem processos para negar proposições compostas e condicionais.

26. Negação de uma conjunção

Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplos

1º) p: $a \neq 0$

q: $b \neq 0$

$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

$\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

2º) p: $2 \mid 4$

q: $3 \mid 9$

$p \wedge q$: $2 \mid 4$ e $3 \mid 9$

$\sim(p \wedge q)$: $2 \nmid 4$ ou $3 \nmid 9$

27. Negação de uma disjunção

Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \iff (\sim p \wedge \sim q)$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplos

1º) p: o triângulo ABC é isósceles

q: o triângulo ABC é equilátero

$p \vee q$: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero

$\sim(p \vee q)$: o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

2º) p: $a = 0$

q: $b = 0$

$p \vee q$: $a = 0$ ou $b = 0$

$\sim(p \vee q)$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

28. Negação de um condicional simples

Já que $\sim(p \rightarrow q) \iff p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplos

1º) p: $2 \in \mathbb{Z}$

q: $2 \in \mathbb{Q}$

$p \rightarrow q$: $2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 2 \in \mathbb{Q}$

$\sim(p \rightarrow q)$: $2 \in \mathbb{Z}$ e $2 \notin \mathbb{Q}$

2º) p: $5^2 = (-5)^2$

q: $5 = -5$

$p \rightarrow q$: $5^2 = (-5)^2 \rightarrow 5 = -5$

$\sim(p \rightarrow q)$: $5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$

29. Negação de proposições quantificadas

a) Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$.

Exemplos

1º) sentença: $(\forall x)(x + 3 = 5)$

negação: $(\exists x)(x + 3 \neq 5)$

2º) sentença: $(\forall x)(x(x + 1) = x^2 + x)$

negação: $(\exists x)(x(x + 1) \neq x^2 + x)$

- 3º) sentença: $(\forall x)(\sqrt{x^2 + 1} = x + 1)$
 negação: $(\exists x)(\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1)$
- 4º) sentença: Todo losango é um quadrado
 negação: Existe um losango que não é quadrado

b) Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$.

Exemplos

- 1º) sentença: $(\exists x)(x = x)$
 negação: $(\forall x)(x \neq x)$
- 2º) sentença: $(\exists a)(a + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3})$
 negação: $(\forall a)(a + \frac{1}{2} < \frac{1}{3})$
- 3º) sentença: $(\exists a)(\frac{1}{a} \in \mathbb{R})$
 negação: $(\forall a)(\frac{1}{a} \notin \mathbb{R})$

EXERCÍCIO

A.8 Dizer qual é a negação de cada proposição abaixo:

- a) $\text{mdc}(2, 3) = 1$ ou $\text{mmc}(2, 3) \neq 6$
- b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ou $3 \cdot 10 \neq 6 \cdot 5$
- c) $\frac{3}{7} \geq 1$ e $-3 \geq -7$
- d) $2^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$
- e) $(-3)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} \neq -3$
- f) $2 \leq 5 \rightarrow 3^2 \leq 5^2$
- g) $(\forall x)(x > 2 \rightarrow 3^x > 3^2)$
- h) $(\exists x)(\sqrt{x} < 0)$
- i) Todo número inteiro primo é ímpar
- j) Todo triângulo isósceles é equilátero
- k) Existe um losango que não é quadrado
- l) Existe um número cuja raiz quadrada é zero
- m) Todo triângulo que tem três ângulos congruentes, tem três lados congruentes

A.9 Classificar em V ou F as negações construídas no exercício anterior.

Criado um novo paraíso

Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor nasceu em S. Petersburgo, passando a maior parte de sua vida na Alemanha. Seus pais eram cristãos de ascendência judia, e Georg logo se interessou pelos conceitos de continuidade e infinito da Teologia medieval.

Estudou em Zürich, Göttingen e Berlim, concentrando-se em Filosofia, Física e Matemática.

Possuindo grande imaginação, em 1867 obteve seu doutoramento em Berlim, com uma tese sobre Teoria dos Números.

Muito atraído pela Análise, sua preocupação estava voltada para a idéia de "infinito", que até 1872 foi muito discutida tanto em Teologia como em Matemática mas sem se chegar a uma conclusão precisa.

Em 1874, Cantor publicou no Journal de Crelle o mais revolucionário artigo que até mesmo seus editores hesitaram em aceitar: havia reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos e, ao contrário de Dedekind, percebeu que nem todos eram iguais, passando a construir uma hierarquia destes conjuntos conforme suas potências.

Mostrou que o conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma potência que o dos inteiros positivos pois, podem ser postos em correspondência biunívoca; provou que o conjunto de todas as frações é contável ou enumerável e que a potência do conjunto dos pontos de um segmento de reta unitário é igual à potência do conjunto dos pontos de um quadrado de lado unitário.

Alguns destes resultados eram tão paradoxais que o próprio Cantor, certa vez escrevendo a Dedekind, disse: "Eu vejo isso, mas não acredito", e pediu ao seu amigo que verificasse a demonstração. Seus incríveis resultados levaram ao estabelecimento da Teoria dos Conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, de profundos efeitos no ensino.



Georg F. L. P. Cantor
(1845 — 1918)

Os matemáticos da época duvidavam da teoria da infinidade completa de Cantor, mas este, juntando as provas, construiu toda uma aritmética transfinita.

Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, de pouca importância, nunca conseguindo realizar uma de suas grandes aspirações que era a de ser professor na Universidade de Berlim, devido à perseguição de Kronecker.

O reconhecimento de suas realizações mereceram a exclamação de Hilbert: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

CAPÍTULO II

CONJUNTOS

Faremos aqui uma revisão das principais noções da teoria dos conjuntos, naquilo que importa à Matemática Elementar. Em seguida usaremos estas noções para apresentar os principais conjuntos de números.

I. CONJUNTO. ELEMENTO. PERTINÊNCIA

30. Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas noções primitivas:

- a) conjunto
- b) elemento
- c) pertinência entre elemento e conjunto

A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Eis alguns exemplos:

- 1) conjunto das vogais
- 2) conjunto dos algarismos romanos
- 3) conjunto dos números ímpares positivos
- 4) conjunto dos planetas do sistema solar
- 5) conjunto dos números primos positivos
- 6) conjunto dos naipes das cartas de um baralho
- 7) conjunto dos nomes dos meses de 31 dias

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado elemento. Assim, nos exemplos anteriores, temos os elementos:

- 1) a, e, i, o, u
- 2) I, V, X, L, C, D, M
- 3) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
- 4) Mercúrio, Venus, Terra, Marte, ...
- 5) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- 6) paus, ouro, copas, espada
- 7) janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro

No exemplo 3, cada número ímpar é elemento do conjunto dos números ímpares, isto é, pertence ao conjunto. Em particular, 5 pertence ao conjunto dos números ímpares e 2 não pertence.

Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc. É importante notar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo, o conjunto das seleções que disputam um campeonato mundial de futebol é um conjunto formado por equipes que, por sua vez, são conjuntos de jogadores.

31. Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula A, B, C, ... e um elemento com uma letra minúscula a, b, c, d, x, y,

Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos

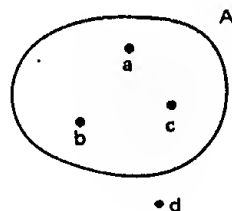
$$x \in A$$

Para indicar que x não é elemento do conjunto A escrevemos

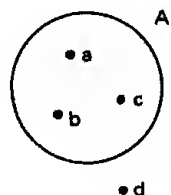
$$x \notin A$$

32. É habitual representar um conjunto pelos pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada. Assim, na representação ao lado temos:

$$a \in A, b \in A \text{ e } d \notin A.$$



No caso de usarmos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado diagrama de Euler-Venn.



II. DESCRIÇÃO DE UM CONJUNTO

Utilizamos dois recursos principais para descrever um conjunto e seus elementos: enumeramos (citamos, escrevemos) os elementos do conjunto ou damos uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

33. Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplos

- 1) conjunto das vogais $\{a, e, i, o, u\}$
- 2) conjunto dos algarismos romanos $\{I, V, X, L, C, D, M\}$
- 3) conjunto dos nomes de meses de 31 dias
 $\{\text{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}\}$

Esta notação também é empregada quando o conjunto é infinito: escrevemos alguns elementos que evidenciem a lei de formação e em seguida colocamos reticências.

Exemplos

- 1) conjunto dos números ímpares positivos
 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$
- 2) conjunto dos números primos positivos
 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$
- 3) conjunto dos múltiplos inteiros de 3
 $\{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\}$

A mesma notação também é empregada quando o conjunto é finito com grande número de elementos: escrevemos os elementos iniciais, colocamos reticências e indicamos o último elemento.

Exemplos

- 1) conjunto dos números inteiros de 0 a 500
 $\{0, 1, 2, 3, \dots, 500\}$
- 2) conjunto dos divisores positivos de 100
 $\{1, 2, 5, 10, \dots, 100\}$

34. Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

e temos: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Exemplos

1) $\{x \mid x \text{ é estado da região sul do Brasil}\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$\{\text{Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}\}$

2) $\{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 3\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$\{1, -1, 3, -3\}$

3) $\{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 \leq x \leq 500\}$ pode também ser indicado por:

$\{0, 1, 2, 3, \dots, 500\}$

III. CONJUNTO UNITÁRIO. CONJUNTO VAZIO

35. Definição

Chama-se *conjunto unitário* aquele que possui um único elemento.

Exemplos

1) conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: $\{1\}$

2) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

3) conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai:
 $\{\text{Rio Grande do Sul}\}$

36. Definição

Chama-se *conjunto vazio* aquele que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é \emptyset .

Obtemos um conjunto vazio quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplos

1) $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$

2) $\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$

3) $\{x \mid x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$

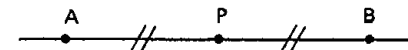
IV. CONJUNTO – UNIVERSO

37. Quando vamos desenvolver um certo assunto de Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de *conjunto universo*.

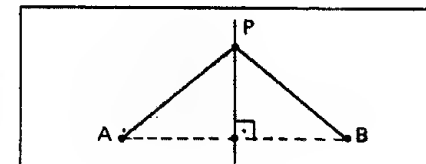
Assim, se procuramos as soluções reais de uma equação, nosso conjunto-universo é \mathbb{R} (conjunto dos números reais); se estamos resolvendo um problema cuja solução vai ser um número inteiro, nosso conjunto-universo é \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros); se estamos resolvendo um problema de Geometria Plana, nosso conjunto-universo é um certo plano α .

38. Quase sempre a resposta para algumas questões depende do universo U em que estamos trabalhando. Consideremos a questão: "qual é o conjunto dos pontos P que ficam a igual distância de dois pontos dados A e B , sendo $A \neq B$?"

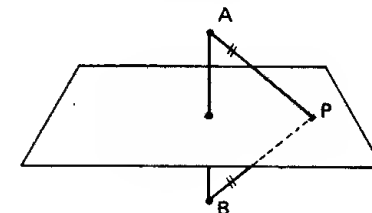
1) Se U é a reta AB , o conjunto procurado é formado só por P ;



2) Se U é um plano contendo A e B , o conjunto procurado é a reta mediatriz do segmento AB ;



3) Se U é o espaço, o conjunto procurado é o plano mediador do segmento AB (plano perpendicular a AB no seu ponto médio).



39. Portanto, quando vamos descrever um conjunto A através de uma propriedade P , é essencial fixarmos o conjunto-universo U em que estamos trabalhando, escrevendo

$$A = \{x \in U \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

EXERCÍCIOS

A.10 Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x \mid x \text{ é letra de palavra "matemática"}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é cor da bandeira brasileira}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é nome de estado que começa com "a"}\}$$

Solução

$$A = \{m, a, t, e, i, c\}$$

$$B = \{\text{branco, azul, amarelo, verde}\}$$

$$C = \{\text{amazonas, amapá, acre, alagoas}\}$$

A.11 Descreva através de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$C = \{\text{brasília, rio de janeiro, salvador}\}$$

Solução

$$A = \{x \mid x \text{ é inteiro, par e não negativo}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é algarismo arábico}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é nome de cidade que já foi capital do Brasil}\}$$

A.12 Escreva com símbolos:

a) conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e +10

b) conjunto dos divisores inteiros de 42

c) conjunto dos múltiplos inteiros de 0

d) conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3

e) conjunto dos nomes das capitais da região centro-oeste do Brasil

A.13 Descreva por meio de uma propriedade dos elementos

$$A = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\} \quad B = \{0, -10, -20, -30, -40, \dots\}$$

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} \quad D = \{\text{Lua}\}$$

A.14 Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$$A = \{x \mid x < \frac{9}{4} \text{ e } x > \frac{6}{5}\} \quad B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\} \quad D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$$

A.15 Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$$

$$B = \{x \mid x > \frac{9}{4} \text{ e } x < \frac{6}{5}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ é divisor de zero}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ é divisível por zero}\}$$

V. CONJUNTOS IGUAIS

40. Definição

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

Exemplos

$$1) \{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$$

$$2) \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{x \mid x \text{ é inteiro, positivo e ímpar}\}$$

$$3) \{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$$

Observemos que na definição de igualdade entre conjuntos não intervém a noção de ordem entre os elementos, portanto:

$$\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\}$$

Observemos ainda que a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é algo absolutamente inútil pois, por exemplo:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, a, b, b, b, c, d, d, d, d\}$$

(para conferir basta usar a definição). Assim, preferimos sempre a notação mais simples.

41. Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$. É evidente que A é diferente de B se existe um elemento de A não pertencente a B ou existe em B um elemento não pertencente a A.

Exemplo

$$\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$$

VI. SUBCONJUNTO

42. Definição

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B .

Com a notação $A \subset B$ indicamos que " A é subconjunto de B " ou " A está contido em B " ou " A é parte de B ".

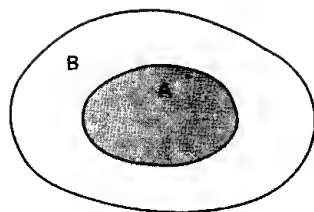
O símbolo \subset é denominado *signal de inclusão*.

Em símbolos, a definição fica assim:

$$A \subset B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemplos

- 1) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$
- 2) $\{a\} \subset \{a, b\}$
- 3) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$
- 4) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$



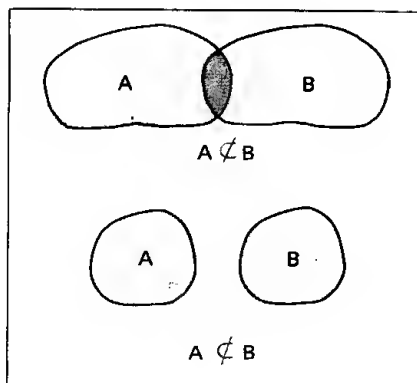
43. Quando $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$ que se lê " B contém A ".

Com a notação $A \not\subset B$ indicamos que " A não está contido em B ", isto é, a negação de $A \subset B$.

É evidente que $A \not\subset B$ somente se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B .

Assim, por exemplo, temos:

- 1) $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d, e\}$
- 2) $\{a, b\} \not\subset \{c, d, e\}$
- 3) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \not\subset \{x \mid x \text{ é inteiro e primo}\}$



44. Vimos anteriormente o conceito de igualdade de conjuntos:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

Nesta definição está explícito que todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$, portanto, podemos escrever:

$$A = B \iff (A \subset B \text{ e } B \subset A).$$

Assim, para provarmos que $A = B$ devemos provar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

45. Propriedades da inclusão

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

- 1ª) $\emptyset \subset A$
- 2ª) $A \subset A$ (reflexiva)
- 3ª) $(A \subset B \text{ e } B \subset A) \Rightarrow A = B$ (anti-simétrica)
- 4ª) $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

A demonstração dessas propriedades é imediata com exceção da 1ª que passamos a provar. Para todo x , a implicação

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

é verdadeira pois $x \in \emptyset$ é falsa. Então, por definição de subconjunto, $\emptyset \subset A$.

46. Conjunto das partes

Dado um conjunto A , chama-se conjunto das partes de A — notação $\mathcal{P}(A)$ — aquele que é formado por todos os subconjuntos de A . Em símbolos:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Exemplos

1º) Se $A = \{a\}$ os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são \emptyset e $\{a\}$, isto é:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

2º) Se $A = \{a, b\}$ os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ e $\{a, b\}$, isto é:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

3º) Se $A = \{a, b, c\}$ os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$, isto é:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

Provaremos mais adiante (capítulo III) que se A é um conjunto finito com n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

EXERCÍCIOS

A.16 Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$, pede-se:

a) escrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

- 1ª) 3 é elemento de A 2ª) 1 não está em B
3ª) B é parte de A 4ª) B é igual a A
5ª) 4 pertence a B

b) classificar as sentenças anteriores em falsa ou verdadeira.

Solução

- 1ª) $3 \in A$ (V)
2ª) $1 \notin B$ (V)
3ª) $B \subset A$ (V)
4ª) $B = A$ (F)
5ª) $4 \in B$ (V)

A.17 Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar:

- a) $A \subset D$ b) $A \subset B$ c) $B \subset C$
d) $D \supset B$ e) $C = D$ f) $A \not\subset C$

Solução

- a) V pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$
b) F pois $1 \in A$ e $1 \notin B$
c) F pois $2 \in B$ e $2 \notin C$
d) V pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$
e) F pois $2 \in D$ e $2 \notin C$
f) V pois $2 \in A$ e $2 \notin C$

A.18 Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

- a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$
b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$
c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$
d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geq 0\} = \emptyset$

A.19 Dizer se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo.

- a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ f) $a \in \{a, \{a\}\}$
b) $\{a\} \in \{a, b\}$ g) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$
c) $\emptyset \in \{0\}$ h) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a\}\}$
d) $0 \in \emptyset$ i) $\emptyset \in \{\emptyset, \{a\}\}$
e) $\{a\} \subset \emptyset$ j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

A.20 Fazer um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C, D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

A.21 Construir o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

VII. REUNIÃO DE CONJUNTOS

47. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *reunião* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

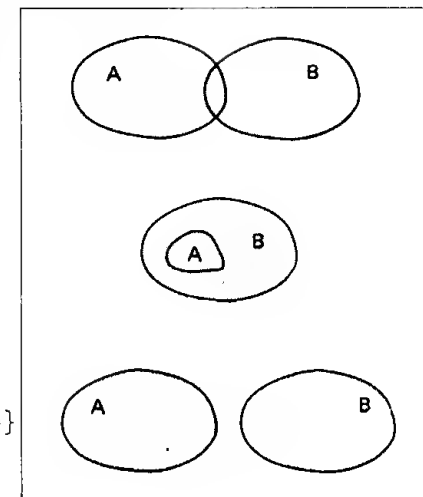
O conjunto $A \cup B$ (lê-se "A reunião B" ou "A u B") é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Notemos que x é elemento de $A \cup B$ se ocorrer ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemplos

- 1) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
4) $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
5) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$



48. Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

- 1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Demonstração

Fazendo $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$ ou, simplesmente $A = \{x \mid p(x)\}$ e, ainda: $B = \{x \mid q(x)\}$, $C = \{x \mid r(x)\}$ e $\emptyset = \{x \mid f(x)\}$ onde f é proposição logicamente falsa, temos:

$$A \cup A = \{x \mid p(x) \text{ ou } p(x)\} = \{x \mid p(x)\} = A$$

Analogamente, as demais decorrem das propriedades das proposições vistas no exercício A.6.

VIII. INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

49. Definição

Dados dois conjuntos A e B , chama-se *intersecção* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B .

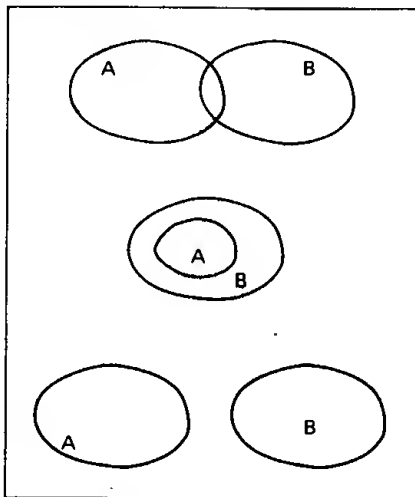
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

O conjunto $A \cap B$ (lê-se "A inter B") é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) *simultaneamente*.

Se $x \in A \cap B$, isto significa que x pertence a A e *também* x pertence a B . O *conectivo* e colocado entre duas condições significa que elas devem ser obedecidas *ao mesmo tempo*.

Exemplos

- 1) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$
- 2) $\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$
- 3) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- 4) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- 5) $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$



50. Propriedades da intersecção

Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

- 1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)
- 2ª) $A \cap U = A$ (elemento neutro)
- 3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
- 4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Como mostramos para a operação de reunião, estas propriedades são também demonstráveis com auxílio do exercício A.6.

51. Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum, A e B são denominados *conjuntos disjuntos*.

IX. PROPRIEDADES

52. Sendo A , B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a intersecção de conjuntos:

- 1ª) $A \cup (A \cap B) = A$
- 2ª) $A \cap (A \cup B) = A$
- 3ª) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiva da reunião em relação à intersecção)
- 4ª) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributiva da intersecção em relação à reunião).

Demonstremos, por exemplo, a 1ª e a 3ª:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= \{x \mid p(x) \vee (p(x) \wedge q(x))\} = \{x \mid (p(x))\} = A \\ A \cup (B \cap C) &= \{x \mid p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))\} = \{x \mid (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))\} = \\ &= \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \cap \{x \mid p(x) \vee r(x)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

A.22 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determinar $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

A.23 Provar que $A \subset (A \cup B)$, $\forall A$.

Solução

$$x \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto: $A \subset (A \cup B)$

A.24 Classificar em V ou F:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $\emptyset \subset (A \cup B)$ | b) $(A \cup B) \subset A$ |
| c) $A \in (A \cup B)$ | d) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$ |
| e) $B \subset (A \cup B)$ | f) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$ |
- admitindo que A , B e C são conjuntos quaisquer.

A.25 Determinar a reunião dos círculos de raio r , contidos num plano α e que têm um ponto comum $O \in \alpha$.

A.26 Determinar a reunião das retas de um plano α que são paralelas a uma dada reta r de α .

A.27 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, pede-se descrever $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

A.28 Provar que $(A \cap B) \subset A$, $\forall A$.

Solução

$x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Rightarrow x \in A$
é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto $(A \cap B) \subset A$.

A.29 Classificar em V ou F

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $\emptyset \subset (A \cap B)$ | b) $A \subset (A \cap B)$ |
| c) $A \in (A \cap B)$ | d) $(A \cap B) \subset (A \cap B)$ |
| e) $(A \cap B) \subset B$ | f) $(A \cap B) \supset (A \cap B \cap C)$ |

admitindo que A , B e C são conjuntos quaisquer.

A.30 Consideremos os conjuntos:

K = conjunto dos quadriláteros planos

$P = \{x \in K \mid x \text{ tem lados 2 a 2 paralelos}\}$

$L = \{x \in K \mid x \text{ tem 4 lados congruentes}\}$

$R = \{x \in K \mid x \text{ tem 4 ângulos retos}\}$

$Q = \{x \in K \mid x \text{ tem 2 lados paralelos e 2 ângulos retos}\}$

Pede-se determinar os conjuntos:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| a) $L \cap P$ | c) $L \cap R$ | e) $L \cap Q$ |
| b) $R \cap P$ | d) $Q \cap R$ | f) $P \cup Q$ |

A.31 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determinar o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \emptyset$.

Solução

a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ então os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4.

b) $X \cap B = \emptyset \Rightarrow 3 \notin X \text{ e } 4 \notin X$

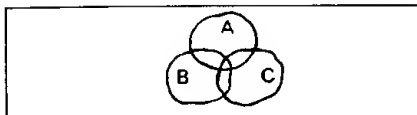
Conclusão $X = \{1, 2\}$

A.32 Determinar o conjunto X tal que

$\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e
 $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

A.33 Assinalar no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $A \cap B \cap C$ | c) $A \cup (B \cap C)$ |
| b) $A \cap (B \cup C)$ | d) $A \cup B \cup C$ |



X. DIFERENÇA DE CONJUNTOS

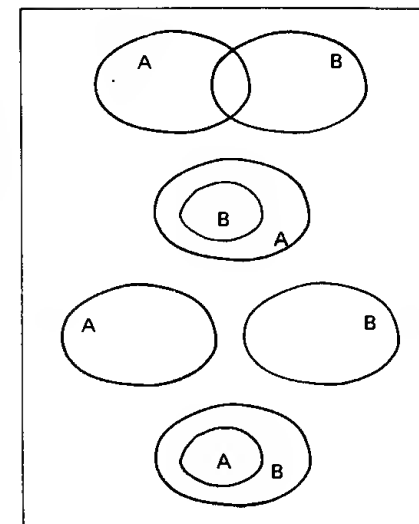
53. Definição

Dados dois conjuntos A e B , chama-se *diferença* entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

- $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$
- $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$
- $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$



XI. COMPLEMENTAR DE B EM A

54. Definição

Dados dois conjuntos A e B , tais que $B \subset A$, chama-se *complementar de B em relação a A* o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B .

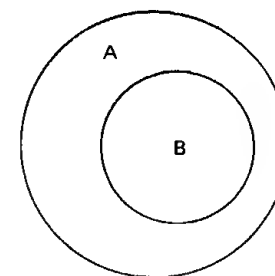
Com o símbolo

$$C_A^B \text{ ou } \bar{A}$$

indicamos o complementar de B em relação a A .

Notemos que C_A^B só é definido para $B \subset A$ e aí temos:

$$C_A^B = A - B$$



Exemplos

1) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então:

$$C_A^B = \{a, b\}$$

2) Se $A = \{a, b, c, d\} = B$, então:

$$C_A^B = \emptyset$$

3) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \emptyset$, então:

$$C_A^B = \{a, b, c, d\} = A$$

55. Propriedades da complementação

Se B e C subconjuntos de A , valem as seguintes propriedades:

$$1^a) C_A^B \cap B = \emptyset \text{ e } C_A^B \cup B = A$$

$$2^a) C_A^A = \emptyset \text{ e } C_A^\emptyset = A$$

$$3^a) C_A(C_A^B) = B$$

$$4^a) C_A^{(B \cap C)} = C_A^B \cup C_A^C$$

$$5^a) C_A^{(B \cup C)} = C_A^B \cap C_A^C$$

Provemos, por exemplo, a 2ª e a 4ª:

$$C_A^A = \{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$$

$$C_A^\emptyset = \{x \in A \mid x \notin \emptyset\} = A$$

$$C_A^{(B \cap C)} = \{x \in A \mid x \notin B \cap C\} = \{x \in A \mid x \notin B \text{ ou } x \notin C\} = \\ = \{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in A \mid x \notin C\} = C_A^B \cup C_A^C$$

EXERCÍCIOS

A.34 Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$.
Determinar:

a) $A - B$

c) $C - B$

e) $A - (B \cap C)$

b) $B - A$

d) $(A \cup C) - B$

f) $(A \cup B) - (A \cap C)$

A.35 Provar que $(A - B) \subset A, \forall A$.

Solução

A implicação $x \in (A - B) \implies (x \in A \text{ e } x \notin B) \implies x \in A$
é verdadeira para todo x , então $(A - B) \subset A$.

A.36 Classificar em V ou F as sentenças:

a) $(A - B) \supset \emptyset$

b) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

c) $(A - B) \subset B$

d) $(A - B) \subset (A \cup B)$

admitindo que A e B são conjuntos quaisquer.

A.37 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$,
obter um conjunto X tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

A.38 Assinalar no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $\bar{A} - B$

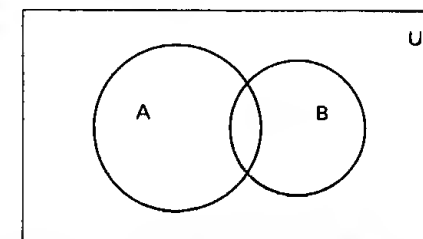
b) $\bar{A} - A \cup B$

c) $\bar{B} \cup A$

d) $\overline{A \cup B}$

e) $\overline{A \cap B}$

f) $\bar{B} \cap A$



A.39 Provar que $A - \bar{B} = A \cap B$ onde A e B são conjuntos quaisquer do universo U .

Solução

A implicação

$$x \in (A - \bar{B}) \implies (x \in A \text{ e } x \notin \bar{B}) \implies x \in A \text{ e } x \in B \implies \\ \implies x \in A \cap B \text{ é verdadeira, } \forall x, \text{ portanto, está provado.}$$

A.40 Classificar em V ou F as seguintes sentenças:

a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

b) $A \subset B \implies (C \cap B) \subset (C \cap A)$

c) $(A - B) \subset (C \cap A)$

d) $(A - B) \subset (C \cap B)$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

A.41 Descrever os elementos dos conjuntos abaixo:

$$A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é letra da palavra "exercício"}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$$

$$D = \{x \mid 2x + 1 = 0 \text{ e } 2x^2 - x - 1 = 0\}$$

$$E = \{x \mid x \text{ é algarismo do número } 234\,543\}$$

A.42 Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Dizer quais das proposições abaixo são verdadeiras.

- a) $a \in E$
- b) $\{a\} \in E$
- c) $a \subset E$
- d) $\{a\} \subset E$
- e) $\emptyset \in E$
- f) $\emptyset \subset E$

A.43 Sejam A e B dois conjuntos finitos. Provar que

$$n_A \cup B = n_A + n_B - n_A \cap B.$$

O símbolo n_X representa o número de elementos do conjunto X .

A.44 Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam Inglês, 163 estudam Francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam Inglês ou Francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

A.45 Sendo A, B e C conjuntos finitos, estabelecer uma fórmula para calcular $n_{A \cup B \cup C}$.

A.46 Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C . Feita uma pesquisa do mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	nenhuma das três
número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Pede-se:

- a) número de pessoas consultadas
- b) número de pessoas que só consomem a marca A
- c) número de pessoas que não consomem as marcas A ou C
- d) número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

A.47 Determinar os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes seis condições:

- 1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$
- 2ª) $A \cap B = \{r, s\}$
- 3ª) $B \cap C = \{s, x\}$
- 4ª) $C \cap A = \{s, t\}$
- 5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$
- 6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

A.48 Em certa comunidade há indivíduos de três raças: branca, preta e amarela. Sabendo que 70% são brancos e 210% não são pretos e 50% são amarelos, pergunta-se:

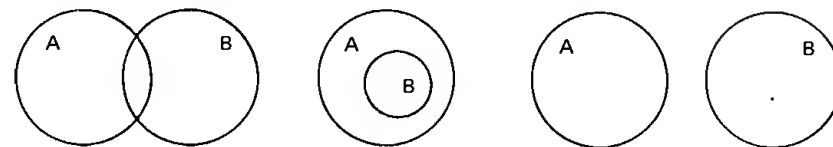
- a) quantos indivíduos tem a comunidade?
- b) quantos são os indivíduos amarelos?

A.49 Dados dois conjuntos A e B , chama-se diferença simétrica de A com B o conjunto $A \Delta B$ tal que:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Pede-se:

- a) determinar $\{a, b, c, d\} \Delta \{c, d, e, f, g\}$
- b) provar que $A \Delta \emptyset = A$, para todo A
- c) provar que $A \Delta A = \emptyset$, para todo A
- d) provar que $A \Delta B = B \Delta A$, para A e B quaisquer
- e) assinalar em cada diagrama abaixo o conjunto $A \Delta B$:



A.50 Desenhar um diagrama de Venn representando quatro conjuntos A, B, C e D não vazios de modo que se tenha

$$A \not\subset B, B \not\subset A, C \supset (A \cup B) \text{ e } D \subset (A \cap B)$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

I. CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS

56. Chama-se conjunto dos números naturais — símbolo \mathbb{N} — o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ...

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

57. Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] *associativa da adição*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

para todos, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

[A.2] *comutativa da adição*

$$a + b = b + a$$

para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

[A.3] *elemento neutro da adição*

$$a + 0 = a$$

para todo $a \in \mathbb{N}$

[M.1] *associativa da multiplicação*

$$(ab)c = a(bc)$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$

[M.2] *comutativa da multiplicação*

$$ab = ba$$

para todos $a, b \in \mathbb{N}$

[M.3] elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

para todo $a \in \mathbb{N}$

[D] Distributiva da multiplicação relativamente à adição

$$a(b + c) = ab + ac$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$

58. Veremos que os próximos conjuntos numéricos a serem apresentados são ampliações de \mathbb{N} , isto é, contêm \mathbb{N} , têm uma adição e uma multiplicação com as propriedades formais já apresentadas e outras mais, que constituem justamente o motivo determinante da ampliação.

Assim, dado um natural $a \neq 0$, o simétrico de a não existe em \mathbb{N} : $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que o símbolo $a - b$ não tem significado em \mathbb{N} para todos $a, b \in \mathbb{N}$, isto é, em \mathbb{N} a subtração não é uma operação. Venceremos esta dificuldade introduzindo um novo conjunto numérico.

II. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

59. Chama-se conjunto dos números inteiros – símbolo \mathbb{Z} – o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

60. No conjunto \mathbb{Z} distinguimos três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

(chamado conjunto dos inteiros não negativos)

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não positivos)

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não nulos)

61. No conjunto \mathbb{Z} são definidas também as operações de adição e multiplicação que apresentam, além de [A1], [A2], [A3], [M1], [M2], [M3] e D, a propriedade:

[A.4] simétrico ou oposto para a adição

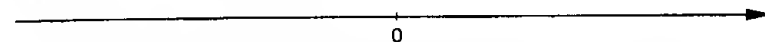
Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

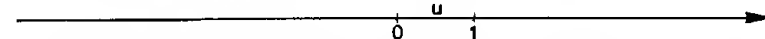
Devido à propriedade [A4], podemos definir em \mathbb{Z} a operação de subtração, estabelecendo que $a - b = a + (-b)$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

62. Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta orientada através do seguinte procedimento:

a) sobre a reta estabelecemos um sentido positivo e um ponto 0 (origem) que representa o inteiro 0 (zero)

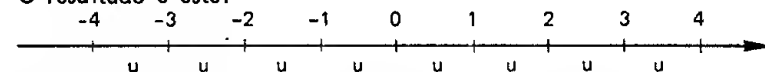


b) a partir de 0, no sentido positivo, marcamos um segmento unitário $u \neq 0$ cuja extremidade passará a representar o inteiro 1



c) para cada inteiro positivo n , a partir de 0, marcamos um segmento de medida nu no sentido positivo cuja extremidade representará n e marcamos um segmento de medida nu no sentido negativo cuja extremidade representará o inteiro $-n$.

O resultado é este:



63. Uma importante noção que devemos ter sobre números inteiros é o conceito de divisor.

Dizemos que o inteiro a é divisor do inteiro b – símbolo $a \mid b$ – quando existe um inteiro c tal que $ca = b$.

$$a \mid b \iff (\exists c \in \mathbb{Z} \mid ca = b)$$

Exemplos

- 1) $2 \mid 12$ pois $6 \cdot 2 = 12$
- 2) $3 \mid -18$ pois $(-6) \cdot 3 = -18$
- 3) $-5 \mid 20$ pois $(-4) \cdot (-5) = 20$
- 4) $-2 \mid -14$ pois $7 \cdot (-2) = -14$
- 5) $4 \mid 0$ pois $0 \cdot 4 = 0$
- 6) $0 \mid 0$ pois $1 \cdot 0 = 0$

64. Quando a é divisor de b dizemos que " b é divisível por a " ou " b é múltiplo de a ".

Para um inteiro a qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos

$$1) D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \quad M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$2) D(-3) = \{1, -1, 3, -3\} \quad M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$$

$$3) D(0) = \mathbb{Z} \quad M(0) = \{0\}$$

65. Dizemos que um número inteiro p é primo quando $p \neq 0, 1$ e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$.

Exemplos

2, -2, 3, -3, 5, -5, 7 e -7 são primos.

EXERCÍCIOS

A.51 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| a) $0 \in \mathbb{N}$ | b) $(2 - 3) \in \mathbb{N}$ | c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ |
| d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$ | e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$ | f) $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$ |
| g) $(-4)(-5) \in \mathbb{Z}_+$ | h) $0 \in \mathbb{Z}_-$ | i) $(5 - 11) \in \mathbb{Z}$ |

A.52 Descrever os seguintes conjuntos: $D(6)$, $D(-18)$, $D(-24) \cap D(16)$, $M(4)$, $M(10)$ e $M(-9) \cap M(6)$.

A.53 Quais dos seguintes elementos de \mathbb{Z} não são primos: 12, -13, 0, 5, 31, -1, 2, -4, 1, 49 e 53?

A.54 Sendo a e b dois números inteiros, pergunta-se:

- $D(a)$ e $D(b)$ podem ser disjuntos?
- Que nome se dá a um inteiro m tal que $D(a) \cap D(b) = D(m)$?
- Quando $D(a) \cap D(b) = \{1, -1\}$, qual é a relação existente entre a e b ?
- Em que caso ocorre $M(a) \subset M(b)$?
- Em que caso ocorre $M(a) \cap M(b) = M(ab)$?
- Que nome se dá a um inteiro n tal que $M(a) \cap M(b) = M(n)$?

A.55 Determinar os seguintes números inteiros:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{mdc}(2, 3)$ | b) $\text{mdc}(-4, 6)$ |
| c) $\text{mdc}(-6, -14)$ | d) $\text{mmc}(2, 3)$ |
| e) $\text{mmc}(-4, 6)$ | f) $\text{mmc}(-6, -14)$ |

III. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

66. Dado um número inteiro $q \neq 1$ e -1 , o inverso de q não existe em \mathbb{Z} : $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso não podemos definir em \mathbb{Z} a operação de divisão, dando

significado ao símbolo $\frac{p}{q}$. Vamos superar esta dificuldade introduzindo os números racionais.

67. Chama-se conjunto dos números racionais – símbolo \mathbb{Q} – o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

(i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

(ii) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

(iii) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

68. No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

\mathbb{Q}_+ = conjunto dos racionais não negativos

\mathbb{Q}_- = conjunto dos racionais não positivos

\mathbb{Q}^* = conjunto dos racionais não nulos

69. Na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b o denominador. Se a e b são primos entre si, isto é, se $\text{mdc}(a, b) = 1$, dizemos $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis mas $\frac{6}{10}$ não é:

70. Consideremos o conjunto \mathbb{Q}' formado pelos números racionais com denominador unitário: $\mathbb{Q}' = \{\frac{x}{1} \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \iff a = b$$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} \iff a + b = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} \iff a \cdot b = a \cdot b$$

portanto, os racionais com denominador igual a 1 comportam-se para a igualdade, a adição e a multiplicação como se fossem números inteiros. Assim, fazendo o racional $\frac{x}{1}$ coincidir com o inteiro x , decorre que:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}, \text{ logo, } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

71. Pode-se verificar que a adição e a multiplicação de racionais apresentam as seguintes propriedades:

$$[A.1] \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$$[A.2] \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$[A.3] \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

$$[A.4] \frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

$$[M.1] \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

$$[M.2] \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$$[M.3] \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$[D] \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

onde $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais quaisquer, portanto, são válidas as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, temos mais a seguinte:

[M.4] *simétrico ou inverso para a multiplicação*

para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Devido à propriedade [M.4], podemos definir em \mathbb{Q}^* , a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

72. Notemos finalmente que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1º) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, é uma decimal exata.

Exemplos

$$\frac{3}{1} = 3; \frac{1}{2} = 0,5; \frac{1}{20} = 0,05; \frac{27}{1000} = 0,027$$

2º) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

Exemplos

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots; \frac{2}{7} = 0,285714285714\dots$$

EXERCÍCIOS

A.56 Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) $0 \in \mathbb{Q}$

d) $517 \in \mathbb{Q}$

e) $0,474747\dots \in \mathbb{Q}$

f) $\{\frac{4}{7}, \frac{11}{3}\} \subset \mathbb{Q}$

g) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

h) $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

i) $\frac{14}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

j) $\frac{21}{14}$ é irredutível

k) $\frac{121}{147} < \frac{131}{150}$

l) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$

A.57 Colocar na forma de uma fração irredutível os seguintes números racionais: 0,4; 0,444...; 0,32; 0,323232...; 54,2; 5,423423423...

A.58 Colocar em ordem crescente os números racionais seguintes: $\frac{15}{16}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{18}{19}$, 1, $\frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

A.59 Mostrar que se r_1 e r_2 são racionais e $r_1 < r_2$, então existe um racional r tal que $r_1 < r < r_2$.

A.60 Representar sobre uma reta orientada os números racionais seguintes: -2 , $-\frac{3}{2}$, -1 , $-\frac{1}{4}$, 0 , $\frac{2}{3}$, 1 , $\frac{4}{3}$, 2 , $\frac{7}{3}$ e $\frac{6}{2}$.

IV. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

73. Dado um número racional $\frac{a}{b}$ e um número natural $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional. Por exemplo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ o que é provado facilmente assim:

(i) admitamos que a fração irredutível $\frac{a}{b}$ seja tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$;

(ii) $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \implies a^2 = 2b^2 \implies a^2$ é par $\implies a$ é par

(iii) fazendo $a = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$, temos:

$a^2 = 2b^2 \implies (2m)^2 = 2b^2 \implies b^2 = 2m^2 \implies b^2$ é par $\implies b$ é par e isto é absurdo pois $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Vamos agora introduzir um conjunto numérico que contém \mathbb{Q} e onde a radiciação pode ser definida.

74. Chama-se conjunto dos números reais \mathbb{R} — aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (chamadas números irracionais).

Assim, todo racional é número real.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

e, além dos racionais, estão em \mathbb{R} números como:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,4142136\dots \\ \pi &= 3,1415926\dots \\ a &= 1,010010001\dots\end{aligned}$$

chamados *números irracionais*.

Se quisermos outros números irracionais, poderemos obtê-los, por exemplo, através da expressão \sqrt{p} onde p é primo e positivo. São irracionais: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc.

Outro recurso para construção de irracionais é usar o fato de que se α é irracional e r é racional não nulo, então: $\alpha + r$, $\alpha \cdot r$, $\frac{\alpha}{r}$ e $\frac{r}{\alpha}$ são todos irracionais.

Exemplos

$$\sqrt{2} + 1, 3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ são irracionais.}$$

75. Além de \mathbb{Q} , destacamos em \mathbb{R} três outros subconjuntos

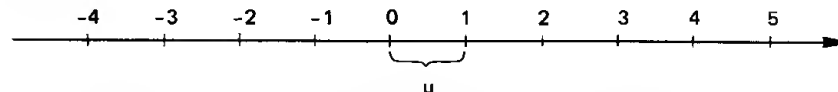
\mathbb{R}_+ = conjunto dos reais não negativos

\mathbb{R}_- = conjunto dos reais não positivos

\mathbb{R}^* = conjunto dos reais não nulos.

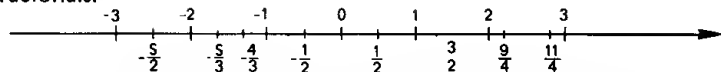
76. As operações de adição e multiplicação em \mathbb{R} gozam das mesmas propriedades vistas para o conjunto \mathbb{Q} . Em \mathbb{R} é também definida a operação de subtração e em \mathbb{R}^* é definida a divisão. Com a introdução dos números irracionais, a radiciação é uma operação em \mathbb{R}_+ , isto é, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ para todo $a \in \mathbb{R}_+$.

77. Já vimos que os números inteiros podem ser representados por pontos de uma reta



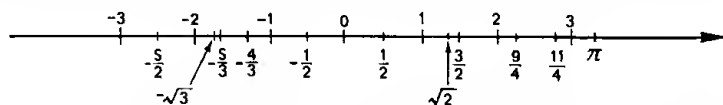
Analogamente, os números racionais não inteiros também podem. Se quisermos, por exemplo, representar o número $\frac{1}{2}$ sobre a reta, marcamos a partir de 0 um segmento de medida $\frac{1}{2}u$ no sentido positivo. A extremidade desse

segmento representa $\frac{1}{2}$. Na figura abaixo representamos sobre a reta vários números racionais.



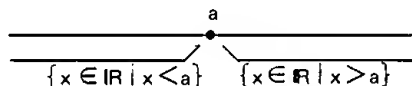
Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, isto é, há pontos da reta que não representam racional algum. Por exemplo, entre os pontos 1,41 e 1,42 fica um ponto que representa $\sqrt{2} = 1,414215 \dots$ (irracional).

Quando representamos também sobre a reta os números irracionais, cada ponto da reta passa a representar necessariamente um número racional ou irracional (portanto, real), isto é, os reais preenchem completamente a reta.



Esta reta, que representa \mathbb{R} , é chamada *reta real* ou *reta numérica*.

78. Na reta real os números estão *ordenados*. Um número a é menor que qualquer número x colocado à sua direita e maior que qualquer número x à sua esquerda.



EXERCÍCIOS

A.61 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

- | | | |
|---|---|---|
| a) $3 \in \mathbb{R}$ | b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ | c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ |
| d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ |
| g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ |

A.62 Provar que se a, b, c, d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

Solução

$$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow (b - d)\sqrt{p} = c - a$$

Como $c - a$ é racional, a última igualdade só subsiste quando $(b - d)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, isto é, se $b - d = 0$. Neste caso, $c - a = 0$, provando a tese.

A.63 Mostrar que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

A.64 Mostrar que existem a e b racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

A.65 Dados dois números x e y reais e positivos, chama-se média aritmética de x com y o real $a = \frac{x + y}{2}$ e chama-se média geométrica o real $g = \sqrt{xy}$. Mostrar que $a \geq g$ para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$.

A.66 Representar sobre a reta real, cada um dos seguintes conjuntos:

- A = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
 B = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
 C = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 2\}$
 D = $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

V. INTERVALOS

79. Dados dois números reais a e b , com $a < b$, definimos:

a) *intervalo aberto* de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

que também pode ser indicado por $a \text{---} b$.

b) *intervalo fechado* de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por $a \text{---} b$.

c) *intervalo fechado à esquerda* (ou aberto à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

que também pode ser indicado por $a \text{---} b$.

d) *intervalo fechado à direita* (ou aberto à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por $a \text{---} b$.

80. Os números reais a e b são denominados, respectivamente, *extremo inferior* e *extremo superior* do intervalo.

81. Exemplos

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ é intervalo fechado

3º) $[\frac{2}{5}, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\}$ é intervalo fechado à esquerda

4º) $] -\frac{1}{3}, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}\}$ é intervalo fechado à direita.

82. Também consideramos intervalos lineares os "intervalos infinitos" assim definidos:

a) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
que podemos também indicar por $-\infty \longrightarrow a$.

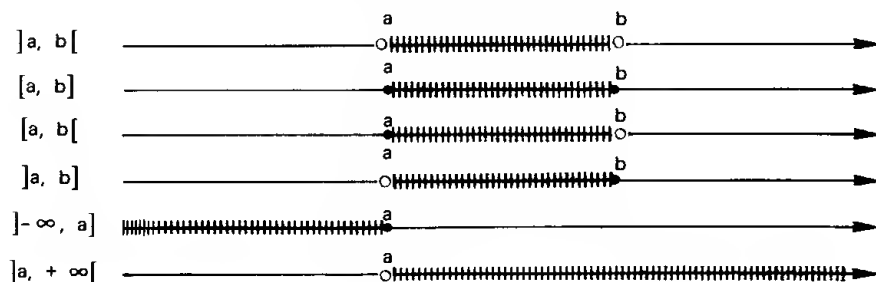
b) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
que também podemos indicar por $-\infty \longrightarrow a$.

c) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
que também podemos indicar por $a \longrightarrow +\infty$.

d) $]a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
que também podemos indicar por $a \longrightarrow +\infty$.

e) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
que também podemos indicar por $-\infty \longrightarrow +\infty$.

83. Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como segue:



EXERCÍCIOS

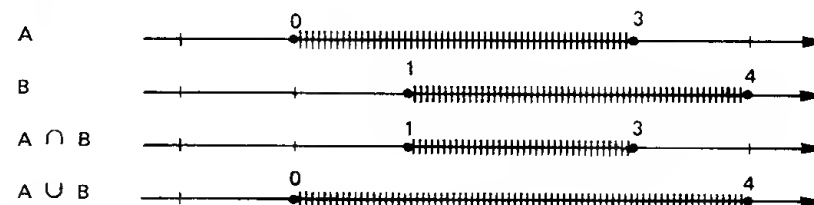
4.67 Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

$[-1, 3]$, $[0, 2[$, $] -3, 4[$, $]-\infty, 5[$ e $]1, +\infty[$.

4.68 Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar

$A \cap B$ e $A \cup B$ sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$

Solução



então $A \cap B = [1, 3]$ e $A \cup B = [0, 4]$

4.69 Descrever os seguintes conjuntos:

a) $[0, 2] \cap [1, 3]$

b) $[0, 2] \cap]1, 3[$

c) $]-1, \frac{2}{5}[\cap]0, \frac{4}{3}[$

d) $]-\infty, 2] \cap [0, +\infty[$

e) $[-1, +\infty[\cap]-\frac{9}{2}, 2[$

f) $[1, 2] \cap [0, 3] \cap [-1, 4]$

4.70 Determinar os seguintes conjuntos:

a) $[-1, 3] \cup [0, 4]$

b) $] -2, 1] \cup]0, 5[$

c) $[-1, 3] \cup [3, 5]$

d) $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$

4.71 Sendo $A = [0, 5[$ e $B =]1, 3[$, determinar \bigcap_A^B

VI. CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

84. Em \mathbb{R}_+ a radiciação é uma operação, isto é, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+$ qualquer que seja o real a não negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{\frac{17}{2}}$ e $\sqrt[6]{\pi}$ são números reais.

Desde que o índice da raiz seja ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, onde $a \in \mathbb{R}_+$, também representam números reais. É o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{-32}$ e $\sqrt[7]{-3}$.

Se o radicando é negativo e o índice da raiz é par, entretanto, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de \mathbb{R} . Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois:

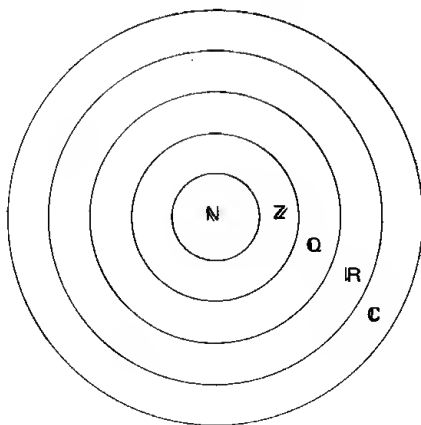
$$\sqrt{-1} = x \implies -1 = x^2$$

e isto é impossível pois se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$.

85. Resolveremos definitivamente o problema de dar significado ao símbolo $\sqrt[n]{a}$, para todo número a , introduzindo no volume F desta coleção o conjunto \mathbb{C} dos números complexos do qual \mathbb{R} é um subconjunto.

VII. RESUMO

86. Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura abaixo:



Observemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notemos também que:

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ = conjunto dos números inteiros negativos

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ = conjunto dos números racionais não inteiros.

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = conjunto dos números reais irracionais.

Finalmente lembremos das principais operações definidas em cada conjunto:

\mathbb{N} : adição e multiplicação

\mathbb{Z} : adição, multiplicação e subtração

\mathbb{Q} : adição, multiplicação, subtração e divisão

\mathbb{R} : adição, multiplicação, subtração, divisão e radiciação (para reais não negativos)

VIII. PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

87. A indução vulgar (generalização de propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares) pode conduzir a sérios enganos na Matemática. Vejamos dois exemplos:

19) Consideremos a relação $y = 2^{2^n} + 1$ definida para $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$n = 0 \implies y = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 \implies y = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 \implies y = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 \implies y = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4 \implies y = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

Os números y encontrados são números primos. Fermat (1601-1665) acreditou que a fórmula acima daria números primos qualquer que fosse o valor inteiro positivo atribuído a n . Esta indução é falsa pois Euler (1707-1783) mostrou que para $n = 5$ resulta $y = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$, isto é, resulta um número divisível por 641 e que, portanto, não é primo.

29) Dada a relação $y = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3$, definida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$n = 1 \Rightarrow y = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9 - 14 + 18}{6} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow y = -\frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{7 \cdot 2}{3} + 3 = \frac{-8 + 36 - 28 + 18}{6} = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow y = -\frac{3^3}{6} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{7 \cdot 3}{3} + 3 = \frac{-27 + 81 - 42 + 18}{6} = 5$$

$$n = 4 \Rightarrow y = -\frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} + 3 = \frac{-64 + 144 - 56 + 18}{6} = 7$$

Poderíamos tirar a conclusão precipitada: "y é número primo, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ". Esta indução também é falsa pois:

$$n = 5 \Rightarrow y = -\frac{5^3}{6} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{7 \cdot 5}{3} + 3 = \frac{-125 + 225 - 70 + 18}{6} = 8$$

88. É necessário, portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar.

Consideremos, por exemplo, a igualdade:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

que expressa a propriedade: "a soma dos n primeiros números ímpares positivos é n^2 ".

Vamos verificar se ela é verdadeira:

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2 \quad (V)$$

$$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2 \quad (V)$$

$$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \quad (V)$$

...

$$n = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100 = 10^2 \quad (V)$$

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até $n = 1\,000\,000$ não estará provado que a fórmula vale para todo n natural, pois poderá existir um $n > 1\,000\,000$ em que a fórmula falha.

89. Para provarmos que a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$ empregamos o princípio da indução finita (P.I.F.) cujo enunciado segue:

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, quando:

19) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

29) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira.

90. Provemos, por exemplo, que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

19) Verifiquemos que $P(1)$ é verdadeira

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$$

29) Admitamos que $P(k)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (\text{hipótese da indução})$$

e provemos que decorre a validade de $P(k + 1)$, isto é:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

Temos:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

EXERCÍCIOS

Demonstrar usando o princípio da indução finita.

A.72 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A.73 $2 + 5 + 8 + \dots + (2 + 3n) = \frac{n(4 + 3n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

A.74 $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A.75 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A.76 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A.77 $8 \mid (3^{2n} - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira pois $8 \mid (3^2 - 1)$

2º) Admitamos que $P(k), k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira

$8 \mid (3^{2k} - 1)$ (hipótese da indução)

e provemos que $8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$:

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k}(8 + 1) - 1 = 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} - 1)$$

então

$$\left. \begin{array}{l} 8 \mid 8 \cdot 3^{2k} \\ 8 \mid (3^{2k} - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \mid (8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1) \Rightarrow 8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$$

A.78 $6 \mid n(n+1)(n+2), \forall n \in \mathbb{N}$

A.79 $2 \mid (n^2 + n), \forall n \in \mathbb{N}$

A.80 $3 \mid (n^3 + 2n), \forall n \in \mathbb{N}$

A.81 $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \cdots (1 + \frac{1}{n}) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A.82 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A.83 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A.84 $2n \geq n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira pois $2 \cdot 1 \geq 1 + 1$

2º) Admitamos que $P(k), k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$2k \geq k + 1$ (hipótese da indução)

e provemos que $2(k+1) \geq (k+1) + 1$

Temos:

$$2(k+1) = 2k + 2 \geq (k+1) + 2 > (k+1) + 1$$

A.85 $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$

A.86 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A.87 $(1+a)^n \geq 1+na, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq -1$

A.88 O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Solução

1º) $P(3)$ é verdadeira pois:

$$n = 3 \Rightarrow d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

e isto é verdade porque um triângulo não tem diagonais.

2º) Supondo válida a fórmula para um polígono de k lados ($k \geq 3$):

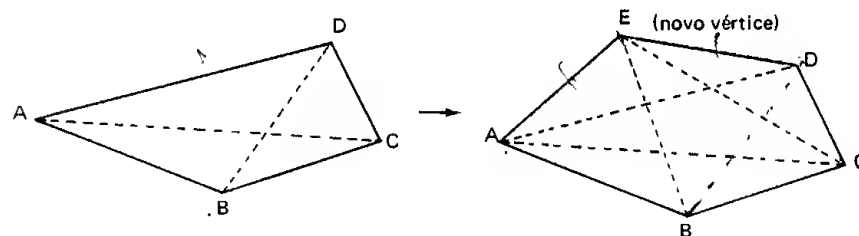
$$d_k = \frac{k(k-3)}{2} \quad (\text{hipótese da indução})$$

provemos que ela vale para um polígono de $k+1$ lados:

$$d_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Quando passamos de um polígono com k vértices para um de $k+1$ vértices, acrescentando mais um vértice, ocorre o seguinte:

- (i) todas as diagonais do primeiro polígono continuam sendo diagonais do segundo;
 - (ii) um lado do primeiro se transforma em diagonal do segundo;
 - (iii) no segundo há $k-2$ novas diagonais (as que partem do novo vértice).
- Vejamos, por exemplo, a passagem de um quadrilátero para um pentágono



AC e BD são diagonais \longrightarrow AC e BD continuam diagonais
 AD é lado \longrightarrow AD se transforma em diagonal
 EB e EC são diagonais

Então:

$$d_{k+1} = d_k + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

A.89 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

A.90 Se A é um conjunto finito com n elementos, então $\mathcal{P}(A)$, conjunto das partes de A , tem 2^n elementos.

RELAÇÕES

Desvendado mistério da continuidade

Julius Wilhelm Richar Dedekind foi um dos quatro filhos de uma família luterana de Braunschweig, Alemanha. Entrou em Göttingen aos dezenove anos e aos vinte e dois obteve seu doutoramento com uma tese sobre Cálculo, elogiada até por Gauss. Foi aluno de Dirichlet e dedicou-se ao ensino secundário em Brunswick até os últimos anos de sua vida.

Preocupado com a natureza das funções e dos números, concentrou-se no problema dos números irracionais desde 1858 quando dava aulas de Cálculo, publicando seu livro mais célebre, "A Continuidade e os Números Irracionais".

Uma de suas grandes dúvidas era sobre o que há na reta geométrica contínua que a distingue dos números racionais, pois, Galileu e Leibniz haviam concluído que entre dois pontos quaisquer sempre existe um terceiro e, assim, os números racionais formam um conjunto denso mas não contínuo.

Relendo, Dedekind observou que a essência da continuidade da reta não está ligada à densidade mas à natureza da divisão da reta em duas partes, que chamou classes, através de um único ponto sobre a reta. A essa divisão da reta chamou "schnitt" ou "corte", que passaria a ser o apoio da Análise, pois com essa observação "o segredo da continuidade seria revelado".

Dedekind viu também que os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, o que conseguiu ampliando o conjunto dos racionais. Esta conclusão é conhecida por nós como Axioma de Cantor-Dedekind.

Mais uma de suas observações foi sobre o teorema fundamental dos limites, achando que para obter-se uma demonstração rigorosa deste conceito era necessário desenvolvê-lo somente através da Aritmética, sem interferência de métodos geométricos embora estes tenham sido responsáveis por seus brilhantes resultados.

Em 1879 foi o primeiro a dar uma definição explícita de corpo numérico como sendo uma coleção de números que formam um grupo abeliano (comutativo) em relação à adição e multiplicação, no qual a multiplicação é distributiva em relação à adição. Este conceito, que foi fundamental para o desenvolvimento da Álgebra, também é responsável pelo teorema dos inteiros algébricos, bem como introduziu na Aritmética o conceito de "ideal".

Dedekind viveu tantos anos depois de sua célebre introdução dos "cortes" que a famosa editora Tebner deu como data de sua morte, 4 de setembro de 1899. Isto divertiu Dedekind que viveu mais doze anos e escreveu ao editor que passara a data em questão em conversa estimulante com seu amigo Georg Cantor.



Julius W. R. Dedekind
(1831 — 1916)

I. PAR ORDENADO

91. Chama-se *par* todo conjunto formado por dois elementos. Assim $\{1, 2\}$, $\{3, -1\}$, $\{a, b\}$ indicam pares. Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{3, -1\} = \{-1, 3\}, \{a, b\} = \{b, a\}.$$

Em Matemática existem situações, onde há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ e $y = 1$ é solução ao passo que $x = 1$ e $y = 2$ não é solução. Se representássemos por um conjunto teríamos: $\{2, 1\}$ seria solução e $\{1, 2\}$ não seria solução. Há uma contradição, pois sendo $\{2, 1\} = \{1, 2\}$, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o *par ordenado* $(2, 1)$ onde fica subentendido que o primeiro elemento 2 refere-se a incógnita x e o segundo elemento 1 refere-se a incógnita y .

92. Admitiremos a noção de *par ordenado* como conceito primitivo^(*). Para cada elemento a e cada elemento b , admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b) que denominamos *par ordenado* de modo que se tenha

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

(*) Poderíamos definir par ordenado como Kuratowski fez:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

mas isto ficaria fora do nível deste curso.

II. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

93. Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam o plano α .

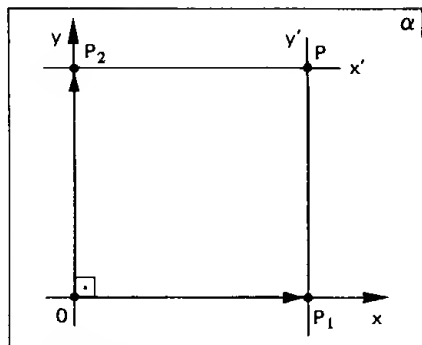
Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas:

$$x' \parallel x \text{ e } y' \parallel y$$

Denominemos P_1 a intersecção de x com y' e P_2 a intersecção de y com x' .

Nestas condições definimos:

- abscissa de P é o número real x_P representado por P_1
- ordenada de P é o número real y_P representado por P_2
- coordenadas de P são os números reais x_P e y_P , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) onde x_P é o primeiro termo.
- eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox)
- eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy)
- sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy
- origem do sistema é o ponto O
- plano cartesiano é o plano α

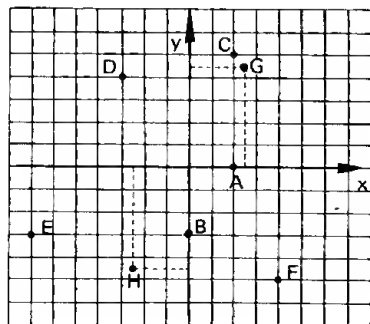


94. Exemplo

Vamos localizar os pontos

$A(2, 0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 5)$, $D(-3, 4)$
 $E(-7, -3)$, $F(4, -5)$, $G(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ e
 $H(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$

no plano cartesiano lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo a ordenada do ponto.



95. Teorema

Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Demonstração

1ª Parte

As definições dadas anteriormente indicam que a todo ponto P , $P \in \alpha$, corresponde um único par de pontos (P_1, P_2) sobre os eixos x e y respectivamente e, portanto, um único par ordenado de números reais (x_P, y_P) tais que x_P e y_P são representados por P_1 e P_2 , respectivamente.

$$\text{Esquema: } P \longrightarrow (P_1, P_2) \longrightarrow (x_P, y_P)$$

2ª Parte

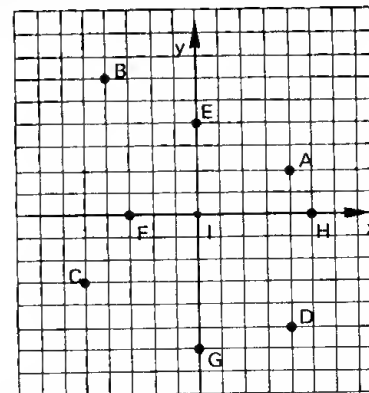
Dado o par ordenado de números reais (x_P, y_P) , existem $P_1 \in x$ e $P_2 \in y$ tais que P_1 representa x_P e P_2 representa y_P , conforme vimos no item 77.

Se construirmos $x' \parallel x$ por P_2 e $y' \parallel y$ por P_1 , essas retas vão concorrer em P . Assim, a todo par (x_P, y_P) corresponde um único ponto P , $P \in \alpha$.

$$\text{Esquema: } (x_P, y_P) \longrightarrow (P_1, P_2) \longrightarrow P$$

EXERCÍCIOS

A.91 Dar as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo.



A.92 Assinalar no plano cartesiano os pontos: $A(2, -3)$, $B(0, -4)$, $C(-4, -5)$, $D(-1, 0)$, $E(0, 5)$, $F(5, 4)$, $G(3, 0)$, $H(-3, 2)$, $I(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

III. PRODUTO CARTESIANO

96. Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos *produto cartesiano* de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y) onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

o símbolo $A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Se A ou B for o conjunto vazio, definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad \emptyset \times B = \emptyset \quad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

97. Exemplos

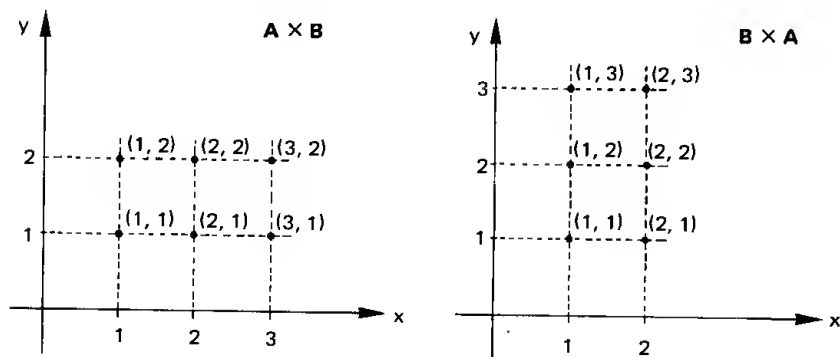
19) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ temos

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e as representações no plano cartesiano são as seguintes:

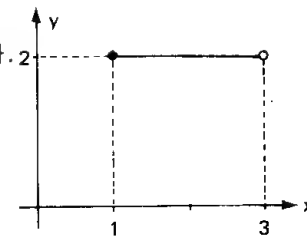


29) Se $A = \{2, 3\}$ então o conjunto $A \times A$ (que também pode ser indicado por A^2 e lê-se "A dois") é

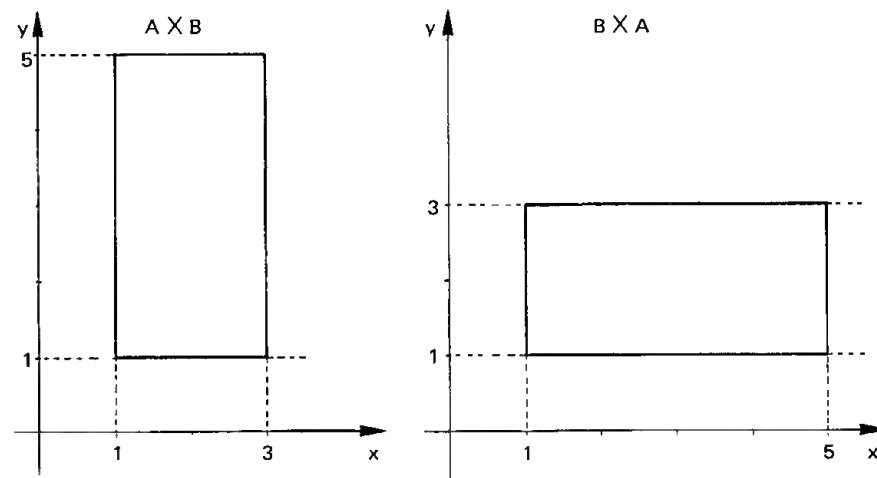
$$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

39) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{2\}$ então temos $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A\}$.

A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto de pontos do segmento paralelo ao eixo dos x da figura ao lado.



49) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo. Notemos que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$ é representado por um retângulo distinto do anterior.



98. Observações

1) Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

2) Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

3) Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio então $A \times B$ é um conjunto infinito.

EXERCÍCIOS

A.93 Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4\} \quad B = \{-2, 1\} \quad C = \{-1, 0, 2\}$$

representar pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

- a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times C$
d) $C \times A$ e) B^2 f) C^2

A.94 Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$$

representar graficamente os seguintes produtos:

- a) $A \times B$ b) $A \times C$ c) $B \times C$
d) $C \times B$ e) A^2 f) C^2

A.95 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ representar graficamente os conjuntos:

- a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

A.96 Sejam os conjuntos A, B e C tais que $A \subset B \subset C$. Estabelecer as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A, A \times B, A \times C, B \times A, B \times B, B \times C, C \times A, C \times B$ e $C \times C$.

A.97 Sabendo que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2 .

Solução

O número de elementos de A^2 é igual ao quadrado do número de elementos de A , portanto

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \Rightarrow [n(A)]^2 = 9 \Rightarrow n(A) = 3.$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1, 2) \in A^2$ e $(4, 2) \in A^2$, concluímos que $A = \{1, 2, 4\}$.

Assim sendo,

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$$

A.98 Se $\{(1, -2), (3, 0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$ então represente A^2 pelos seus elementos.

A.99 Considerando $A \subset B$, $\{(0, 5), (-1, 2), (2, -1)\} \subset A \times B$ e $n(A \times B) = 12$, represente $A \times B$ pelos seus elementos.

IV. RELAÇÃO BINÁRIA

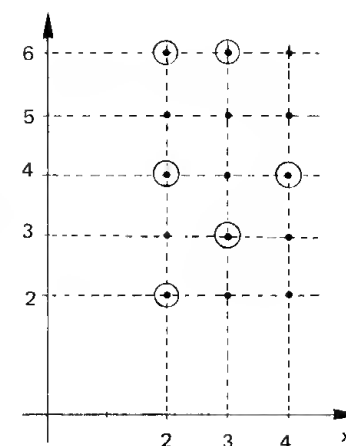
99. Consideremos os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. O produto cartesiano de A por B é o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

formado por $3 \cdot 5 = 15$ elementos representados na figura ao lado. Se agora considerarmos o conjunto de pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $x \mid y$ (lê-se: x é divisor de y), teremos

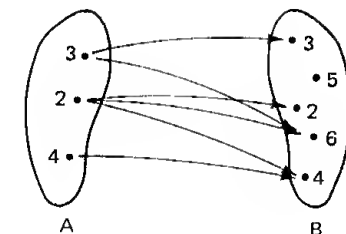
$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \mid y\} = \\ = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

que é chamado *relação entre os elementos de A e de B* ou, mais simplesmente, uma *relação binária de A em B* .



O conjunto R está contido em $A \times B$ e é formado por pares (x, y) em que o elemento x de A é "associado" ao elemento y de B mediante um certo critério de "relacionamento" ou "correspondência".

Será bastante útil a representação da relação por meio de flechas, como na figura ao lado.



100. Definição

Dados dois conjuntos A e B , chama-se *relação binária de A em B* todo subconjunto R de $A \times B$.

$$R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de $A \times A$ é chamado *relação binária em A* .

$$R \text{ é relação binária em } A \Leftrightarrow R \subset A \times A$$

Utilizaremos as seguintes nomenclaturas já consagradas

A = conjunto de partida da relação R

B = conjunto de chegada ou contra-domínio da relação R.

Quando o par (x, y) pertence a relação R, escrevemos $x R y$ (lê-se: “x erre y”)

$$(x, y) \in R \iff x R y$$

e se o par (x, y) não pertence a relação R escrevemos $x \nmid R y$ (lê-se: “x não erre y”)

$$(x, y) \notin R \iff x \nmid R y$$

101. Exemplos

1º) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ de A em B?

Os elementos de R são todos os pares ordenados de $A \times B$ nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo, isto é, são os pares formados pela “associação de cada elemento $x \in A$ com cada elemento de $y \in B$ tal que $x < y$ ”.

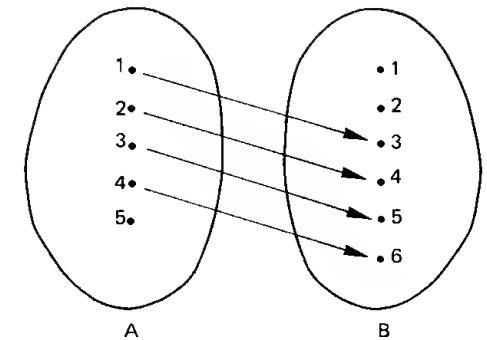
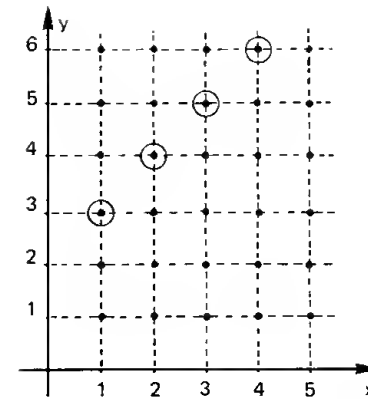
Temos então

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

2º) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quais são os elementos da relação binária R de A em B assim definida: $x R y \iff y = x + 2$?

Fazem parte da relação todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $y = x + 2$.

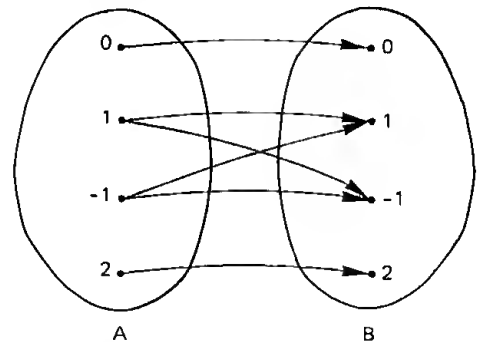
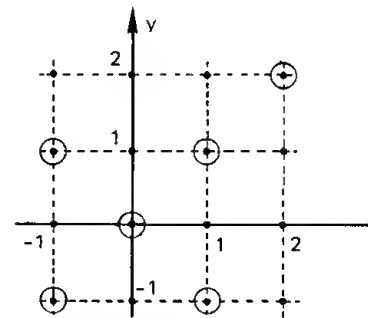
Utilizando as representações gráficas



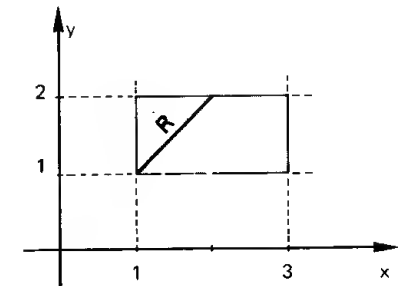
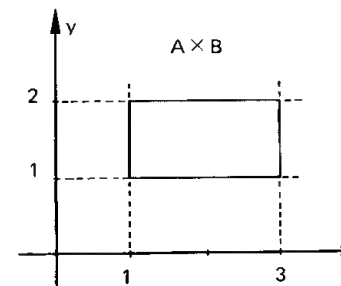
3º) Se $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

Fazendo a representação gráfica notamos que

$$R = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1), (2, 2)\}$$



4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}$ pede-se a representação cartesiana de $A \times B$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$



EXERCÍCIOS

A.100 Pede-se:

- enumerar pares ordenados
- representar por meio de flechas
- fazer o gráfico cartesiano

das relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:

- $x R y \iff x + y = 2$
- $x S y \iff x^2 = y$
- $x T y \iff |x| = |y|$
- $x V y \iff x + y > 2$
- $x W y \iff (x - y)^2 = 1$

A.101 Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Enumerar os pares ordenados e construir o gráfico cartesiano da relação R em A dada por:

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid \text{mdc}(x, y) = 2\}$$

A.102 Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Construir o gráfico cartesiano da relação R em A definida por:

$$x R y \iff x \text{ e } y \text{ são primos entre si.}$$

A.103 Dado o conjunto $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \leq m \leq 7\}$. Construir o gráfico cartesiano da relação binária R em A definida por:

$$x R y \iff x^2 + y^2 = 25.$$

V. DOMÍNIO E IMAGEM

102. Definição

Seja R uma relação de A em B .

Chama-se *domínio* de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente a R .

$$x \in D \iff \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

Chama-se *imagem* de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R .

$$y \in Im \iff \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição que $D \subset A$, e $Im \subset B$.

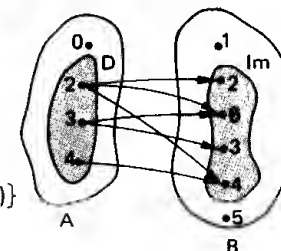
103. Exemplos

1.º) Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$?

Utilizando o esquema das flechas é fácil perceber que D é o conjunto dos elementos de A dos quais partem flechas e que Im é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam flechas, portanto:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

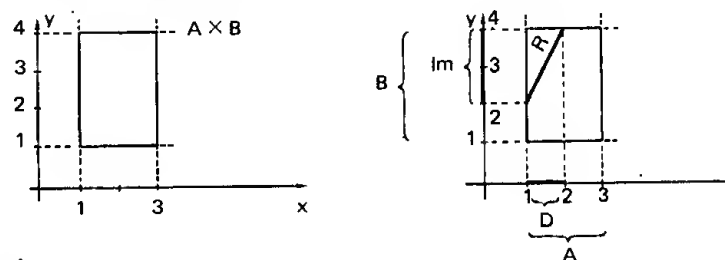
$$D = \{2, 3, 4\} \quad Im = \{2, 3, 4, 6\}$$



2.º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?

Utilizando a representação cartesiana

temos $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$



EXERCÍCIOS

A.104 Estabelecer o domínio e a imagem das seguintes relações:

- $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$
- $\{(-2, 4), (-1, 1), (3, -7), (2, 1)\}$
- $\{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\}$
- $\{(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1 - \sqrt{3}, 1)\}$
- $\{(3, \frac{1}{2}), (\frac{5}{2}, -1), (\frac{3}{2}, 0)\}$

A.105 Estabelecer o domínio e a imagem das relações binárias do exercício A.100.

A.106 Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por

$$x R y \iff x = y^2$$

Pede-se:

- enumerar os pares ordenados de R
- enumerar os elementos do domínio e da imagem de R
- fazer o gráfico cartesiano de R

A.107 Se R é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$ definida por

$$x R y \iff x = 2y$$

Pede-se:

- a representação cartesiana de $A \times B$
- a representação cartesiana de R
- o domínio e a imagem de R

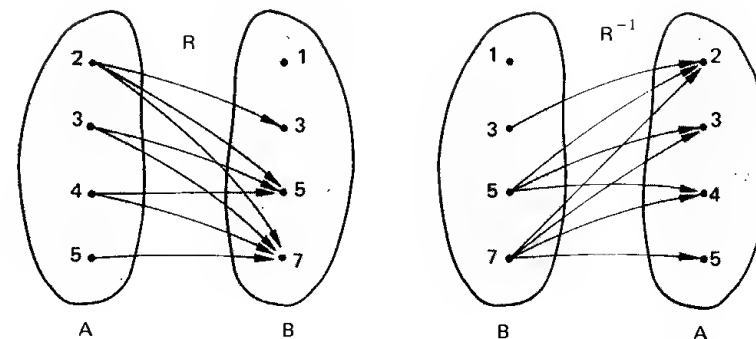
A.108 Se R e S são as relações binárias de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ em $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq y \leq 3\}$ definidas por:

$$x R y \iff 2 \text{ divide } (x - y)$$

$$x S y \iff (x - 1)^2 = (y - 2)^2$$

Pedem-se:

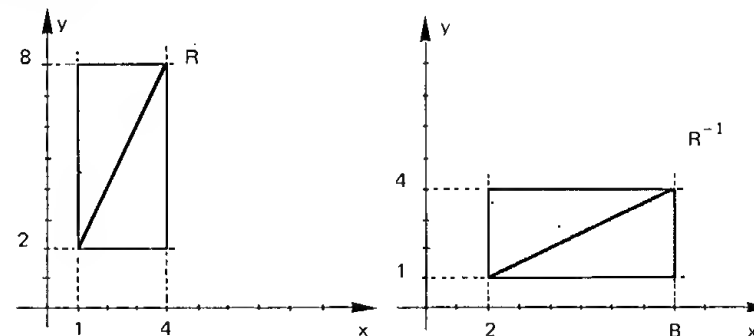
- as representações cartesianas de R e de S
- o domínio e a imagem de R e de S
- $R \cap S$.



temos $R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 7)\}$

e $R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4), (7, 5)\}$

2.º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 8\}$ representar no plano cartesiano as relações $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ e sua inversa R^{-1} .



VI. RELAÇÃO INVERSA

104. Definição

Dada uma relação binária R de A em B , consideremos o conjunto

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Como R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A à qual daremos o nome de *relação inversa de R* .

$$(y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R$$

Decorre dessa definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

105. Exemplos

1.º) Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ quais são os elementos de $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ e de R^{-1} ?

Utilizando o esquema das flechas

VII. PROPRIEDADES

São evidentes as seguintes propriedades

$$1.ª) D(R^{-1}) = \text{Im}(R)$$

isto é, o domínio de R^{-1} é igual à imagem de R .

$$2.ª) \text{Im}(R^{-1}) = D(R)$$

isto é, a imagem de R^{-1} é igual ao domínio de R .

$$3.ª) (R^{-1})^{-1} = R$$

isto é, a relação inversa de R^{-1} é a relação R .

A.109 Enumerar os elementos de R^{-1} , relação inversa de R , nos seguintes casos:

- a) $R = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$
- b) $R = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (-2, 1)\}$
- c) $R = \{(-3, -2), (1, 3), (-2, -3), (3, 1)\}$

A.110 Enumerar os elementos e esboçar os gráficos de R e R^{-1} , relações binárias em $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$, nos seguintes casos:

- a) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + y = 8\}$
- b) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 2y = 10\}$
- c) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = (x - 3)^2 + 1\}$
- d) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2x\}$

A.111 Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 10\}$ e as seguintes relações binárias:

- a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$
- b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$
- c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$
- d) $V = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 7\}$

pede-se o gráfico cartesiano dessas relações e das respectivas relações inversas.

FUNÇÕES

I. CONCEITO DE FUNÇÃO

106. Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

e as seguintes relações binárias de A em B :

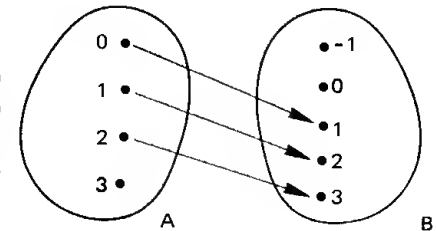
$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} \\ S &= \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\} \\ T &= \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} \\ V &= \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2 - 1\} \\ W &= \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2\} \end{aligned}$$

Analisando cada uma das relações temos:

a) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

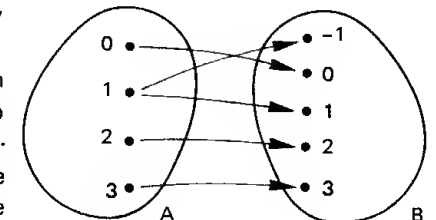
Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Para o elemento $3 \in A$, não existe $y \in B$ tal que $(3, y) \in R$.



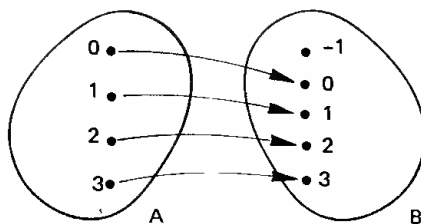
b) $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)\}$

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos de B , o 1 e o -1 tais que $(1, 1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.



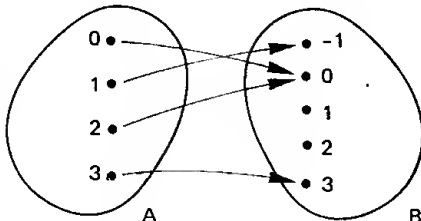
$$c) T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.



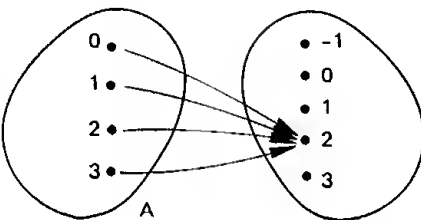
$$d) V = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.



$$e) W = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.



As relações T , V , W , que apresentam a particularidade: "para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que (x, y) pertence a relação", recebem o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B*.

II. DEFINIÇÃO

107. Dados dois conjuntos A e $B^{(*)}$, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \iff (\forall x \in A, \exists! y \in B \mid (x, y) \in f)$$

(*) Em todo o nosso estudo de funções, fica estabelecido que A e B são conjuntos formados de números reais, isto é, A e B contidos em \mathbb{R} .

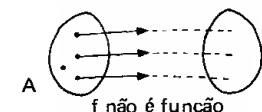
108. Vejamos agora com o auxílio do esquema das flechas, que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação (ou função).

1.^o) é necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha.

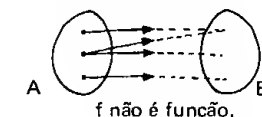
2.^o) é necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

Uma relação f , não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima isto é,

1.^o) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou



2.^o) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.



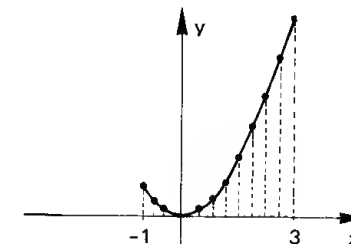
109. Podemos verificar através da representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: basta verificarmos se a *reta paralela ao eixo y* conduzida pelo ponto $(x, 0)$, onde $x \in A$, *encontra sempre o gráfico de f em um só ponto*.

110. Exemplos

1.^o) A relação f de A em \mathbb{R} , com

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\},$$

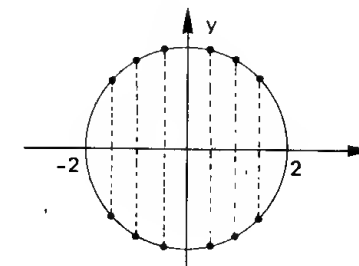
representada ao lado é *função*, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.



2.^o) A relação f de A em \mathbb{R} representada ao lado, onde

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

não é *função*, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

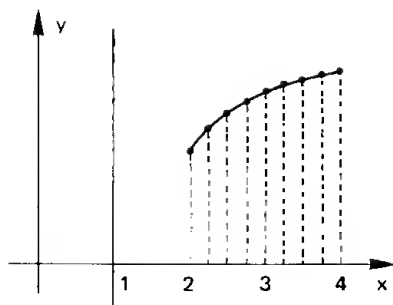


3.º) A relação f de A em \mathbb{R} , representada ao lado, onde

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$$

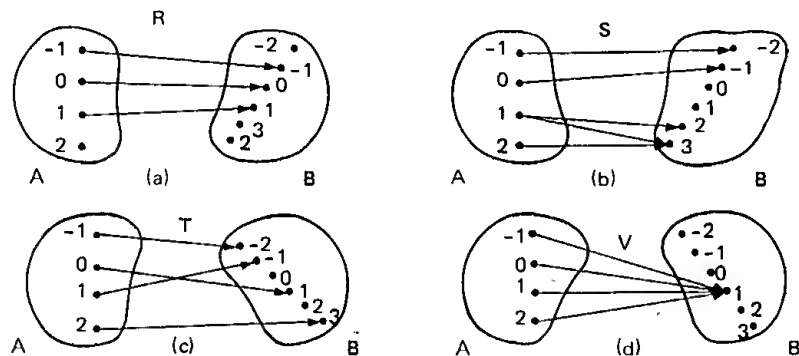
não é função de A em \mathbb{R} pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(1, 0)$ não encontra o gráfico de f . Observemos que f é função de B em \mathbb{R} onde

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}.$$

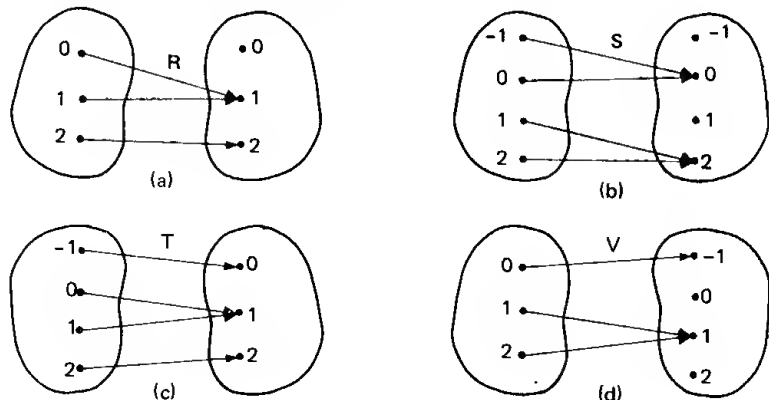


EXERCÍCIOS

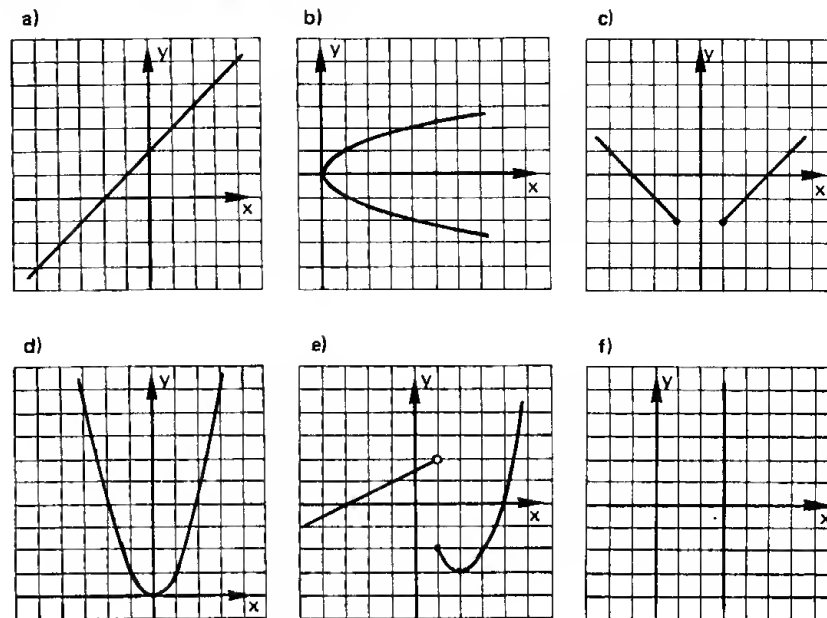
A.112 Estabelecer se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justificar.



A.113 Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?



A.114 Quais das relações de \mathbb{R} em \mathbb{R} cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justificar.



III. NOTAÇÃO DAS FUNÇÕES

111. Toda função é uma relação binária de A em B , portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Isto significa que, dados os conjuntos A e B , a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicarmos uma função f , definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto f(x)$$

112. Exemplos

$$1^{\circ}) \quad f: A \longrightarrow B \\ x \longmapsto 2x$$

é uma função que associa a cada x de A um y de B tal que $y = 2x$.

$$2^{\circ}) \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2$$

é uma função que leva a cada x de \mathbb{R} um y de \mathbb{R} tal que $y = x^2$.

$$3^{\circ}) \quad f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

é uma função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}_+$ um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

113. Se $(a, b) \in f$, como já dissemos anteriormente, o elemento b é chamado *imagem* de a pela aplicação f ou *valor* de f no elemento a e indicamos:

$$f(a) = b$$

que se lê “ f de a é igual a b ”.

114. Exemplo

Seja a função

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 1 \quad \text{então}$$

a) a imagem de 0 pela aplicação f é 1, isto é:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

b) a imagem de -2 pela aplicação f é -3, isto é:

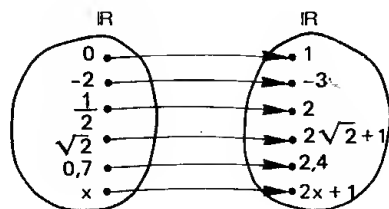
$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$$

c) analogamente

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 1$$

$$f(0,7) = 2 \cdot 0,7 + 1 = 2,4$$



EXERCÍCIOS

A.115 Qual é a notação das seguintes funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} ?

- f associa cada número real ao seu oposto
- g associa cada número real ao seu cubo
- h associa cada número real ao seu quadrado menos 1
- k associa cada número real ao número 2

A.116 Qual é a notação das seguintes funções?

- f é função de \mathbb{Q} em \mathbb{Q} que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.
- g é a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Q} que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.
- h é a função de \mathbb{R}^* em \mathbb{R} que associa cada número real ao seu inverso.

A.117 Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcular:

- $f(2)$
- $f(-1)$
- $f(\frac{1}{2})$
- $f(-\frac{1}{3})$
- $f(\sqrt{3})$
- $f(1 - \sqrt{2})$

A.118 Seja f a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcular:

- $f(2)$
- $f(-3)$
- $f(0)$
- $f(\frac{3}{2})$

A.119 Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $f(3)$
- $f(-\frac{3}{7})$
- $f(\sqrt{2})$
- $f(\sqrt{4})$
- $f(\sqrt{3} - 1)$
- $f(0,75)$

A.120 Seja a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do

domínio que tem $-\frac{3}{4}$ como imagem?

Solução

Queremos determinar o valor de x tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$;

basta, portanto, resolver a equação $\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4}$.

Resolvendo a equação:

$$\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4} \iff 4(2x - 3) = -3 \cdot 5 \iff 8x - 12 = -15 \iff x = -\frac{3}{8}$$

Resposta: o elemento é $x = -\frac{3}{8}$.

A.121 Seja a função f de $\mathbb{R} - \{1\}$ em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

A.122 Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

IV. DOMÍNIO E IMAGEM

115. Definição

Considerando que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um *domínio* e uma *imagem*.

Chamamos de *domínio* o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

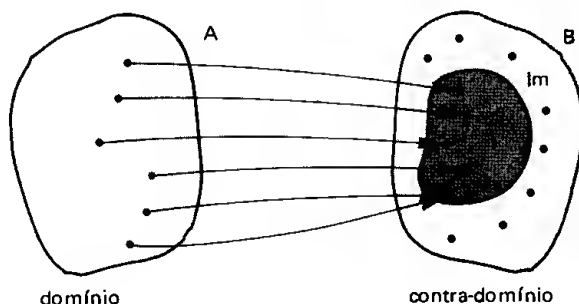
$$D = A.$$

Chamamos de *imagem* o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto:

imagem é subconjunto do contradomínio

isto é,

$$Im \subset B$$



Notemos, que, feita a representação cartesiana da função f , temos:

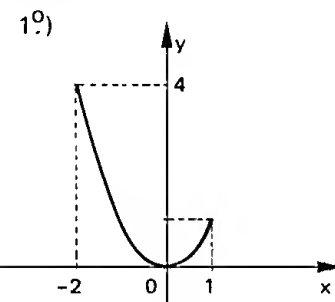
Domínio

(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas *verticais* conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f .

Imagem

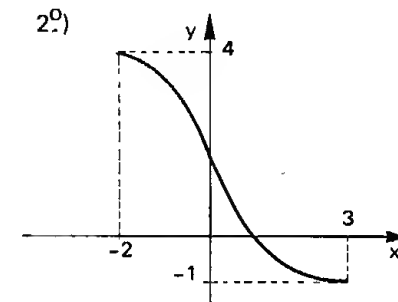
(Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas *horizontais* conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f , isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f .

116. Exemplos



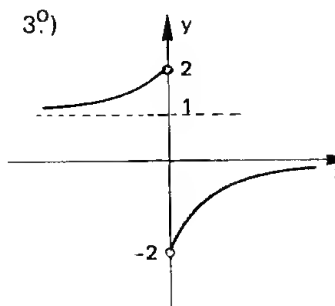
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$$



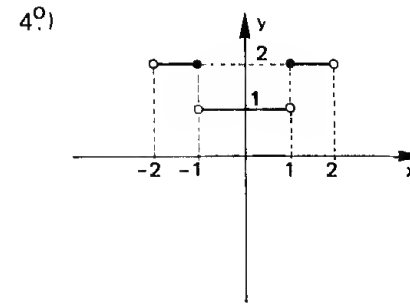
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 4\}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$

$$Im = \{1, 2\}$$

117. As funções que apresentam maior interesse na Matemática são as funções numéricas, isto é, aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de \mathbb{R} . As *funções numéricas* são também chamadas *funções reais* de variável real.

Observemos que uma função f fica completamente definida quando são dados o seu domínio D, o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando nos referirmos à função f e dermos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentendemos que D é o conjunto dos números reais x cujas imagens pela aplicação f são números reais, isto é:

$$x \in D \iff f(x) \in \mathbb{R}.$$

118. Exemplos

Tomemos algumas funções e determinemos o seu domínio.

1.º) $y = 2x$

notando que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}.$$

2.º) $y = x^2$

notando que $x^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}.$$

3.º) $y = \frac{1}{x}$

notemos que $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real e diferente de zero; temos então

$$D = \mathbb{R}^*.$$

4.º) $y = \sqrt{x}$

notemos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, x é real e não negativo, então

$$D = \mathbb{R}_+.$$

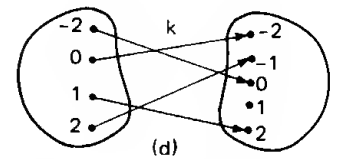
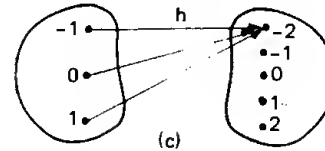
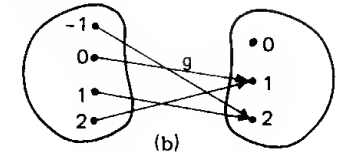
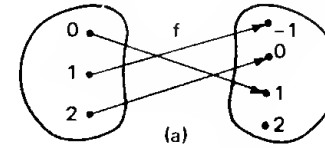
5.º) $y = \sqrt[3]{x}$

notando que $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

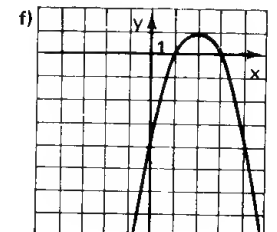
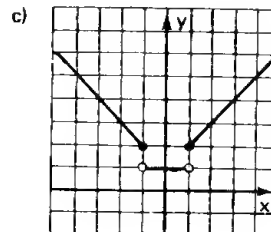
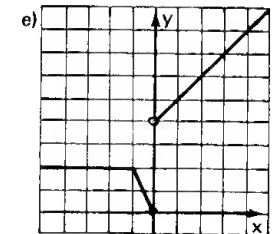
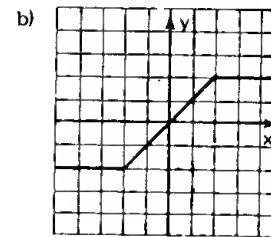
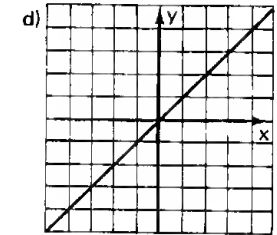
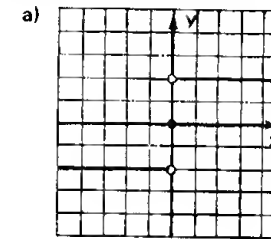
$$D = \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIOS

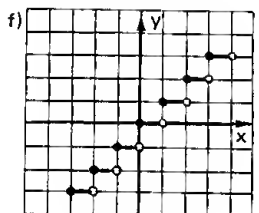
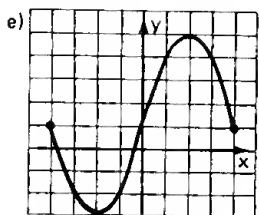
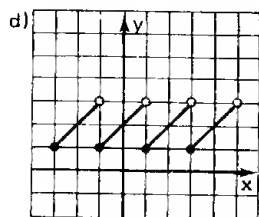
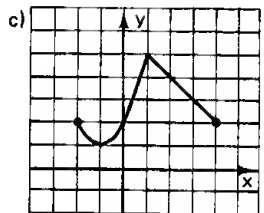
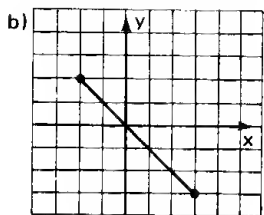
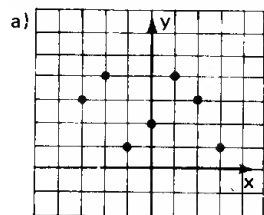
A.123 Estabelecer o domínio e a imagem das funções abaixo:



A.124 Nos gráficos cartesianos das funções abaixo representadas, determinar o conjunto imagem.



A.125 Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabelecer o domínio e a imagem.



A.126 Dar o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

d) $p(x) = \sqrt{x-1}$

e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

f) $r(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

h) $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$

i) $u(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3}$

V. FUNÇÕES IGUAIS

119. Definição

Duas funções, f de A em B e g de C em D são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

120. Exemplos

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ então as funções de A em B definidas por:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

são iguais, pois

$$x = 1 \implies f(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad g(1) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$x = 2 \implies f(2) = 2 - 1 = 1 \quad \text{e} \quad g(2) = \frac{4 - 1}{2 + 1} = 1$$

$$x = 3 \implies f(3) = 3 - 1 = 2 \quad \text{e} \quad g(3) = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2$$

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} não são iguais, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.

EXERCÍCIOS

A.127 Sejam as funções f , g e h de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

A.128 As funções: f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e g de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $g(x) = x$ são iguais? Justificar.

A.129 As funções f e g cujas leis de correspondência são

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \quad \text{podem ser iguais? Justificar.}$$

A.130 As funções f e g de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$ em \mathbb{R} , definidas por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}} \quad \text{são iguais? Justificar.}$$

A.131 As funções:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + 1 \quad \quad \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{são iguais? Justificar.}$$

APÊNDICE SOBRE INEQUAÇÕES

Vamos ver aqui algumas técnicas úteis para os próximos capítulos.

121. Definição

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$. Chamamos *inequação* na incógnita x , a qualquer uma das sentenças abertas, abaixo:

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

Exemplos

1.º) $2x - 4 > x$ é uma inequação onde $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = x$.

2.º) $3x - 5 < 2$ é uma inequação onde $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2$.

3.º) $x^2 - 3 \geq \frac{1}{x}$ é uma inequação onde $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

4.º) $\sqrt{x-2} \leq \frac{1}{x-3}$ é uma inequação onde $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

122. Domínio de validade

Chamamos de domínio de validade da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, onde D_1 é o domínio da função f e D_2 é o domínio da função g . É evidente que para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \iff (x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \iff (f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } g(x_0) \in \mathbb{R}).$$

Nos exemplos anteriores, temos:

$$1.º) D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$2.º) D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$3.º) D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$$

$$4.º) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$$

123. Solução

O número real x_0 é *solução* da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

Exemplo

O número real 3 é solução da inequação $2x + 1 > x + 3$, pois

$$\underbrace{2 \cdot 3 + 1}_{f(3)} > \underbrace{3 + 3}_{g(3)}$$

é uma sentença verdadeira.

124. Conjunto-solução

O conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira, chamamos de *conjunto-solução* da inequação.

Exemplo

A inequação $2x + 1 > x + 3$ tem o conjunto-solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira.

Se não existir o número real x tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \emptyset$.

Exemplo

O conjunto-solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \emptyset$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação, significa determinar o seu conjunto-solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então, x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio de validade da inequação). Assim sendo, temos

$$x_0 \in S \implies x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto-solução é sempre subconjunto do domínio de validade da inequação.

125. Inequações equivalentes

Duas inequações são *equivalentes em* $D \subset \mathbb{R}$ se o conjunto-solução da primeira é igual ao conjunto-solução da segunda.

Exemplos

1.º) $3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois o conjunto-solução de ambas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

2.º) $x < 1$ e $x^2 < 1$ não são equivalentes em \mathbb{R} , pois $x_0 = -2$ é solução da primeira mas não o é da segunda.

126. Princípios

Na resolução de uma inequação procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais "simples", em que o conjunto-solução possa ser obtido com maior facilidade. Surge, então, a pergunta: "que transformações podem ser feitas em uma inequação para obter-se uma inequação equivalente?". A resposta a esta pergunta são os dois princípios seguintes:

P-1) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2 , respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$, as inequações

$$f(x) < g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplo

Seja a inequação

$$\underbrace{3x - 1}_{f(x)} > \underbrace{2x + 3}_{g(x)} \quad (1)$$

adicionemos $h(x) = -2x + 1$ aos dois membros:

$$\underbrace{(3x - 1)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} > \underbrace{(2x + 3)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)}$$

façamos as simplificações possíveis:

$$\underbrace{x}_{f(x) + h(x)} > \underbrace{4}_{g(x) + h(x)} \quad (2)$$

portanto, como (1) é equivalente a (2), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Na prática, aplicamos a propriedade P-1 com o seguinte enunciado: "em uma inequação podemos transpor um termo de um membro para outro trocando o sinal do termo considerado":

$$f(x) + h(x) < g(x) \implies f(x) < g(x) - h(x).$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \implies 3x - 1 - 2x > 3 \implies x > 3 + 1 \implies x > 4.$$

P-2) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2 , respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$ e tem sinal constante, então:

- a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.
- b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos

1.º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira através de uma multiplicação por 12.

2.º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois a segunda foi obtida da primeira através de uma multiplicação por -1 e inversão do sentido da desigualdade.

3.º) $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em \mathbb{R} . Notemos que a segunda foi obtida da primeira através da multiplicação por $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade P-2 com o seguinte enunciado: "em uma inequação podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente."

EXERCÍCIOS

A.132 Resolver as inequações em \mathbb{R} :

- a) $4x + 5 > 2x - 3$
- b) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$
- c) $3(x + 1) - 2 \geq 5(x - 1) - 3(2x - 1)$

A.133 Resolver em \mathbb{R} , a inequação

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq x$$

Solução

A inequação proposta é equivalente à inequação que se obtém multiplicando pelo m.m.c. (3, 2) = 6:

$$2(x+2) - 3(x-1) \geq 6x.$$

Efetuada as operações, temos:

$$-x + 7 \geq 6x$$

ou ainda

$$-7x \geq -7.$$

Dividindo ambos os membros por -7 e lembrando que devemos inverter a desigualdade, temos

$$x \leq 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}.$$

A.134 Resolver em \mathbb{R} , as inequações:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \geq 1$

b) $\frac{2x-3}{2} - \frac{5-3x}{3} < 3x - \frac{1}{6}$

c) $(3x+1)(2x+1) \leq (2x-1)(3x+2) - (4-5x)$

d) $(3x-2)^2 - (3x-1)^2 > (x+2)^2 - (x-1)^2$

e) $4(x-2) - (3x+2) > 5x-6 - 4(x-1)$

f) $6(x+2) - 2(3x+2) > 2(3x-1) - 3(2x+1)$

A.135 Resolver em \mathbb{R} , a inequação:

$$\frac{2x-3}{x-1} \leq 2$$

Solução

A inequação proposta é equivalente a $\frac{2x-3}{x-1} - 2 \leq 0$

que, reduzindo ao mesmo denominador, fica $\frac{-1}{x-1} \leq 0$.

Notemos que a fração $\frac{-1}{x-1}$ deverá ser não positiva; como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x-1$ deverá ser positivo. Lembrando que o denominador não poderá ser nulo

$$x-1 > 0 \iff x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

A.136 Resolver em \mathbb{R} , as inequações:

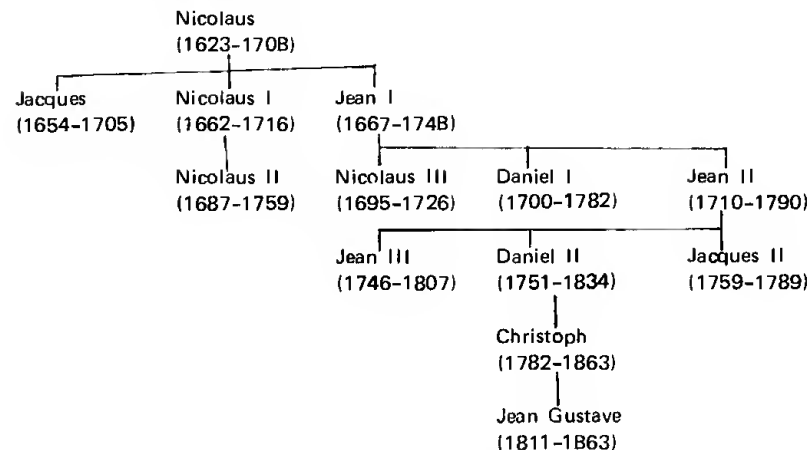
a) $\frac{3x-2}{1-x} \leq -3$

b) $\frac{4x-5}{2x-1} \geq 2$

c) $\frac{-4-3x}{3x+2} < -1$

Família serve a ciência por 100 anos

Nenhuma família na história da Matemática produziu tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoulli. Oriunda dos Países Baixos espanhóis, esta família emigrou em 1583 para Basileia, na Suíça, fugindo da guerra. Cerca de uma dúzia de membros da família conseguiu renome na Matemática e na Física, sendo quatro deles eleitos como sócios estrangeiros da Academia das Ciências, da França.



Os Bernoulli matemáticos: árvore genealógica

Os primeiros Bernoulli que se destacaram em Matemática foram Jacques e Jean, respectivamente quinto e décimo filhos de Nicolaus.

Jacques viajou muito para encontrar cientistas de outros países. Destacou-se por seus estudos sobre infinitésimos, seus artigos sobre máximos e mínimos de funções publicadas na revista "Acta Eruditorum" (Anotações dos eruditos), suas pesquisas sobre séries infinitas em que aparece o resultado célebre conhecido como "desigualdade de Bernoulli": $(1+x)^n > 1 + nx$. A ele é também atribuída a demonstração de que a série harmônica é divergente.

Jacques tinha uma verdadeira fascinação por curvas, tendo estudado várias delas: a parábola semi-cúbica, a lemniscata, a catenária, a isócrona a espiral logarítmica, etc.

Jean Bernoulli seguiu a vontade do seu pai deveria ser médico, porém indo estudar em Paris, desgarrando para a Matemática, escrevendo em 1691-1692 dois livros de Cálculo que foram publicados muito mais tarde. Em 1692, passou a ensinar Cálculo a um jovem marquês de L'Hospital e, em troca de um salário regular, concordou em enviar ao nobre francês suas descobertas matemáticas, para serem usadas como o marquês o desejasse. A consequência foi que uma das mais importantes descobertas de Jean passou à História com nome "regra de L'Hospital" se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis em $x = a$, $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$, então existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Os irmãos Jean e Jacques mantinham intensa correspondência com Leibniz pois todos eles colaboravam com artigos para a mesma revista, "Acta Eruditorum" (Anotações dos eruditos). Jacques é também autor do clássico "Arte de conjecturar", considerada a mais antiga obra sobre probabilidade.

Jean foi pai de Nicolas, Daniel e Jean II. Nicolas foi professor de Matemática em S. Petersburgo e Daniel e Jean II foram professores em Basileia. Outro Bernoulli, Nicolas II, primo desses três, ocupou durante algum tempo o lugar que foi de Galileu, em Pádua.

Da geração mais jovem foi Daniel que mais se destacou com seus resultados em hidrodinâmica e probabilidade.

Houve ainda outros Bernoulli que conseguiram evidência em Matemática, no século XVIII, fazendo juz ao nome da família.



Jean Bernoulli
(1667 — 1748)



Jacques Bernoulli
(1654 — 1705)



Daniel Bernoulli
(1700 — 1782)

CAPÍTULO VI

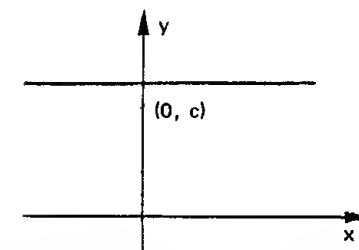
FUNÇÕES DO 1º GRAU

1. FUNÇÃO CONSTANTE

127. Definição

Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função constante* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$. Isto é:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow c \end{aligned}$$



O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto $(0, c)$.

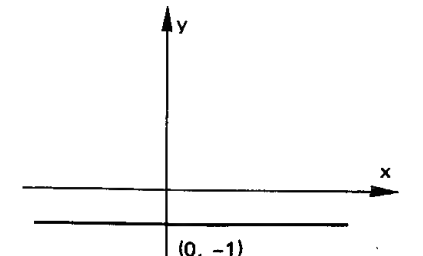
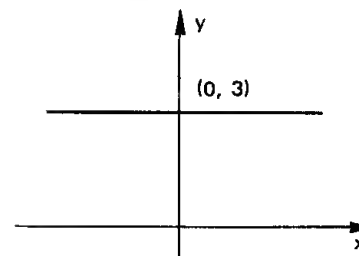
A imagem é o conjunto $\text{Im} = \{c\}$

128. Exemplos

Construir os gráficos das aplicações de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por:

1) $y = 3$

2) $y = -1$

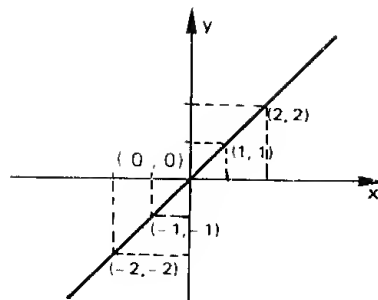


II. FUNÇÃO IDENTIDADE

129. Definição

Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função identidade* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x , isto é:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$



O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

A imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}$.

III. FUNÇÃO LINEAR

130. Definição

Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função linear* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

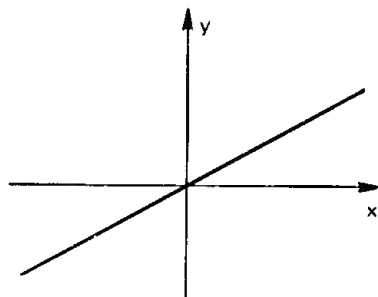
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax, \quad a \neq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem. (**)

A imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja o $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y.$$



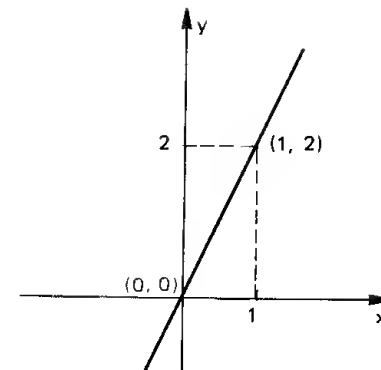
(*) Observe que se $a = 0$, teremos a função constante $y = 0$.

(**) Essa demonstração será feita para um caso mais geral e se encontra na página 96.

131. Exemplos

1º) Construir o gráfico da função $y = 2x$. Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e no caso da função linear um dos pontos é a origem, basta atribuir a x um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

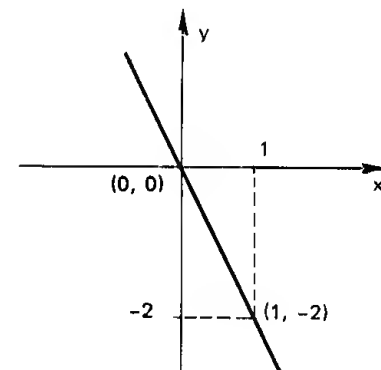
x	$y = 2x$
1	2



Pelos pontos $P(0, 0)$ e $Q(1, 2)$ traçamos a reta PQ que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Construir o gráfico da função $y = -2x$. Analogamente, temos:

x	$y = -2x$
1	-2



EXERCÍCIOS

A.137 Construir o gráfico das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

- a) $y = 2$ b) $y = -3$
c) $y = \sqrt{2}$ d) $y = 0$

A.138 Construir, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

- a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{x}{2}$

A.139 Construir, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

- a) $y = -x$ b) $y = -2x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\frac{x}{2}$

IV. FUNÇÃO AFIM

132. Definição

Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função afim* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, isto é:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b, \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

133. Exemplos

- a) $y = 3x + 2$ onde $a = 3$ e $b = 2$
- b) $y = -2x + 1$ onde $a = -2$ e $b = 1$
- c) $y = x - 3$ onde $a = 1$ e $b = -3$
- d) $y = 4x$ onde $a = 4$ e $b = 0$

Notemos que para $b = 0$ a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim.

V. GRÁFICO

134. "O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma reta".

Demonstração

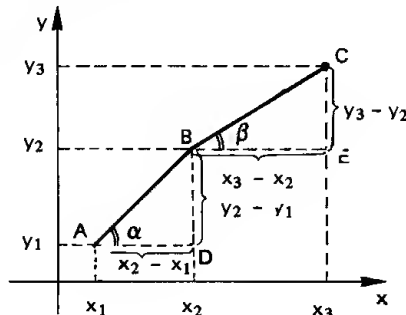
Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ ($a \neq 0$) e (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem a mesma reta, mostremos, inicialmente que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b \quad (1)$$

$$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b \quad (2)$$



$$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b \quad (3)$$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$\left. \begin{aligned} y_3 - y_2 &= a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

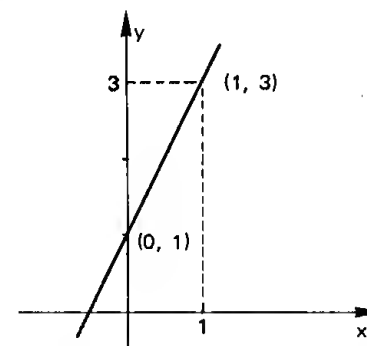
Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A, B e C estão alinhados.

135. Aplicações

1ª) Construir o gráfico da função $y = 2x + 1$.

Considerando que o gráfico da função afim é uma reta, vamos atribuir a x dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de y .

x	$y = 2x + 1$
0	1
1	3

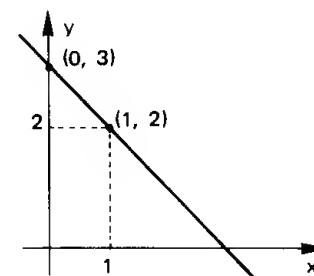


O gráfico procurado é a reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$.

2ª) Construir o gráfico da função $y = -x + 3$.

De modo análogo, temos

x	$y = -x + 3$
0	3
1	2



EXERCÍCIOS

A.140 Construir o gráfico cartesiano das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

- | | |
|------------------|---------------------------|
| a) $y = 2x - 1$ | b) $y = x + 2$ |
| c) $y = 3x + 2$ | d) $y = \frac{2x - 3}{2}$ |
| e) $y = -3x - 4$ | f) $y = -x + 1$ |
| g) $y = -2x + 3$ | h) $y = \frac{4 - 3x}{2}$ |

A.141 Resolver analítica e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução Analítica

Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vamos apresentar dois deles.

1º) processo: Substituição

Este processo, consiste em substituir o valor de uma das incógnitas, obtido a partir de uma das equações, na outra.

Resolvendo, por exemplo, a primeira equação na incógnita x , temos:

$$x - y = -3 \iff x = y - 3$$

e substituímos x por este valor na segunda equação:

$$2(y - 3) + 3y = 4 \iff 2y - 6 + 3y = 4 \iff y = 2$$

que levamos à primeira equação, encontrando:

$$x - 2 = -3 \iff x = -1.$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

2º) processo: Adição

Este processo baseia-se nas seguintes propriedades:

I. "Num sistema de equações, se multiplicarmos todos os coeficientes de uma equação por um número não nulo, o sistema que obtemos é equivalente ao anterior (*)"

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

II. "Num sistema de equações, se substituírmos uma das equações, pela sua soma com uma outra equação do sistema, o novo sistema é equivalente ao anterior".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(*) Sistemas de equações são equivalentes quando apresentam as mesmas soluções.

O fundamento do processo da edição, consiste no seguinte: aplicando a primeira propriedade, multiplicamos cada equação por números convenientes, de modo que, os coeficientes da determinada incógnita sejam opostos e pela segunda propriedade, substituímos uma das equações pela soma das duas equações.

Assim, no sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

multiplicamos a primeira equação por 3

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação pela soma das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 5x = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

substituindo $x = -1$ em $2x + 3y = 4$, encontramos

$$2 \cdot (-1) + 3y = 4 \Rightarrow y = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

Solução Gráfica

O sistema proposto

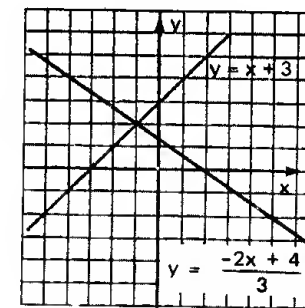
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \frac{-2x + 4}{3} \end{cases}$$

Construímos os gráficos de

$$y = x + 3 \text{ e } y = \frac{-2x + 4}{3}$$



A solução do sistema são as coordenadas do ponto de interseção das retas, portanto $(-1, 2)$.

A.142 Resolver analítica e graficamente os sistemas de equações.

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ |

A.143 Resolver os sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sugestão: faça $\frac{1}{x-y} = a$ e $\frac{1}{x+y} = b$

$$b) \begin{cases} \frac{3}{x+y+1} - \frac{2}{2x-y+3} = \frac{5}{12} \\ \frac{2}{x+y+1} + \frac{3}{2x-y+3} = 1 \end{cases}$$

A.144 Obter a equação da reta que passa pelos pontos (1, 2) e (3, -2).

Solução

Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos o valores de a e b .

Considerando que o ponto (1, 2), pertence a reta de equação $y = ax + b$, ao substituirmos $x = 1$ e $y = 2$ em $y = ax + b$, temos a sentença verdadeira:

$$2 = a \cdot 1 + b \quad \text{isto é:} \quad a + b = 2$$

Analogamente, para o ponto (3, -2), obtemos:

$$-2 = a \cdot 3 + b \quad \text{isto é:} \quad 3a + b = -2$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

encontramos $a = -2$ e $b = 4$.

Assim, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

A.145 Obter a equação da reta que passa pelos pontos:

- a) (2, 3) e (3, 5) b) (1, -1) e (-1, 2)
c) (3, -2) e (2, -3) d) (1, 2) e (2, 2)

VI. IMAGEM

136. O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é \mathbb{R} .

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que
 $f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y$.

VII. COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

137. O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado *coeficiente angular* ou *declividade* da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear*.

138. Exemplo

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que se $x = 0$ temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y .

EXERCÍCIOS

A.146 Obter a equação da reta que passa pelo ponto: (1, 3) e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

A equação procurada é da forma $y = ax + b$.

Se o coeficiente angular é 2, então $a = 2$.

Substituindo $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, vem:

$$3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1.$$

A equação procurada é $y = 2x + 1$.

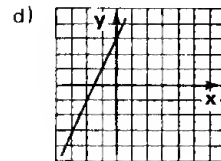
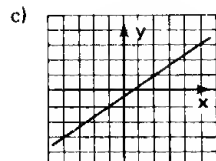
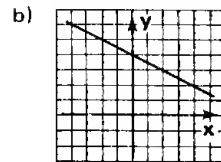
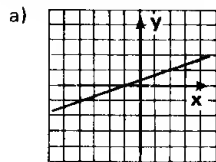
A.147 Obter a equação da reta que passa pelo ponto (-2, 4) e tem coeficiente angular igual a -3.

A.148 Obter a equação da reta com coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$ e passando pelo ponto (-3, 1).

A.149 Obter a equação da reta que passa pelo ponto (-2, 1) e tem coeficiente linear igual a 4.

A.150 Obter a equação da reta com coeficiente linear igual a -3 e passa pelo ponto (-3, -2).

A.151 Dados os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , obter a lei de correspondência dessas funções.



VIII. ZERO DA FUNÇÃO AFIM

139. Definição

Zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \iff f(x) = 0$$

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação do 1º grau

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução $x = -\frac{b}{a}$.

De fato, resolvendo $ax + b = 0$, $a \neq 0$, temos

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo

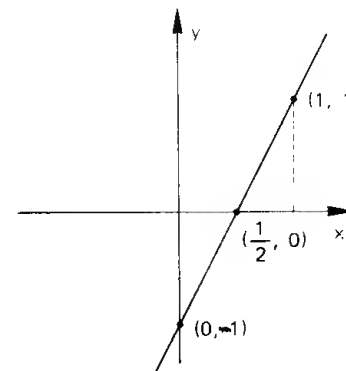
O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$ pois, fazendo $2x - 1 = 0$ vem $x = \frac{1}{2}$.

140. Podemos interpretar o zero da função afim, como sendo a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x .

Exemplo

Fazendo o gráfico da função $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo dos x em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

x	y
0	-1
1	1



IX. FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES

141. Definição

A função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *crescente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

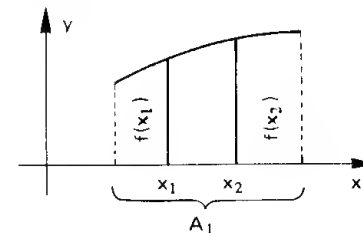
Em símbolos: f é crescente quando

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

e isto também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0)$$

Na linguagem prática (não matemática), isto significa que a função é crescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x , o valor de y também aumenta.



142. Exemplo

A função $f(x) = 2x$ é crescente em \mathbb{R} , pois:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{2x_1}_{f(x_1)} < \underbrace{2x_2}_{f(x_2)} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

143. Definição

A função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *decrecente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

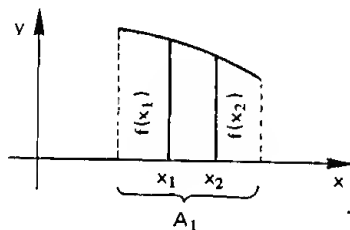
Em símbolos: f é decrecente quando

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

e isto também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0)$$

Na linguagem prática, (não matemática) isto significa que a função é decrecente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x , o valor de y diminui.



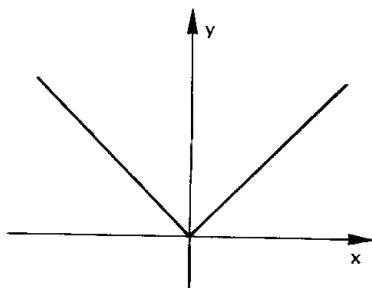
144. Exemplo

A função $f(x) = -2x$ é decrecente em \mathbb{R} , pois

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{-2x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{-2x_2}_{f(x_2)} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

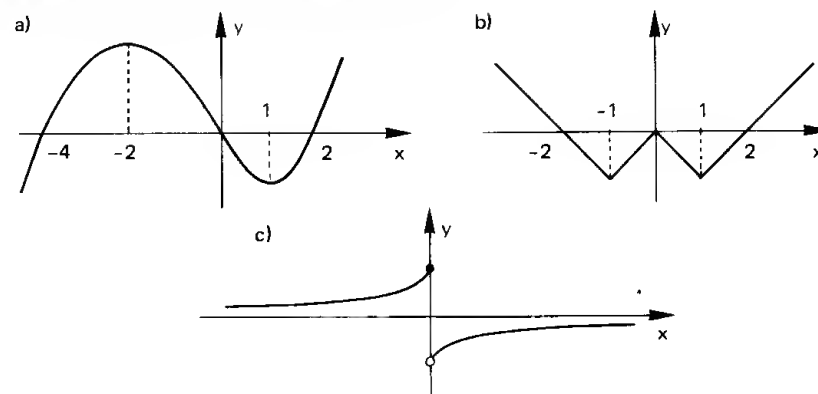
Notemos que uma mesma função $y = f(x)$, pode não ter o mesmo comportamento (crescente ou decrecente) em todo o seu domínio.

É bastante comum que uma função seja crescente em certos subconjuntos de D e decrecente em outros. O gráfico ao lado representa uma função crescente em \mathbb{R}_+ e decrecente em \mathbb{R}_- .



EXERCÍCIO

A.152 Com base nos gráficos abaixo, de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , especificar os intervalos onde a função é crescente ou decrecente.



X. TEOREMA

145. "A função afim é crescente (decrecente) se, e somente se, o coeficiente angular for positivo (negativo)".

Demonstração

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b \text{ é crescente} &\iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad (x_1 \neq x_2) \iff \\ &\iff \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \quad (x_1 \neq x_2) \iff \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad (x_1 \neq x_2) \iff \\ &\iff a > 0. \end{aligned}$$

Fica como exercício provar que $f(x) = ax + b$ decrecente equivale a $a < 0$.

EXERCÍCIOS

A.153 Especificar para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrecente em \mathbb{R} :

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo ($a = 3$)

b) É decrecente, pois o coeficiente angular é negativo ($a = -4$).

A.154 Especificar para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em \mathbb{R} .

- a) $y = 1 + 5x$ b) $y = -3 - 2x$
 c) $y = x + 2$ d) $y = 3 - x$
 e) $y = -2x$ f) $y = 3x$

A.155 Estudar segundo os valores do parâmetro m , a variação (crescente, decrescente ou constante) da função $y = (m - 1)x + 2$.

Solução

Se $m - 1 > 0$, isto é, $m > 1$, então a função terá coeficiente angular positivo e, portanto, crescente em \mathbb{R} .

Se $m - 1 < 0$, isto é, $m < 1$, então a função terá coeficiente angular negativo e, portanto, decrescente em \mathbb{R} .

Se $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$, então será função $y = (1 - 1)x + 2$, ou seja, $y = 2$ que é constante em \mathbb{R} .

A.156 Estudar segundo os valores do parâmetro m , a variação (crescente, decrescente ou constante) das funções abaixo

- a) $y = (m + 2)x - 3$ b) $y = (4 - m)x + 2$
 c) $y = 4 - (m + 3)x$ d) $y = m(x - 1) + 3 - x$

XI. SINAL DE UMA FUNÇÃO

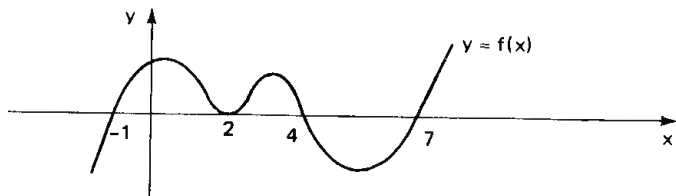
146. Seja a função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$. Vamos resolver o problema "para que valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?"

Resolver este problema significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada x pertencente ao seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função, quando a função está representada no plano cartesiano, basta examinar se é positiva, nula ou negativa a ordenada de cada ponto da curva.

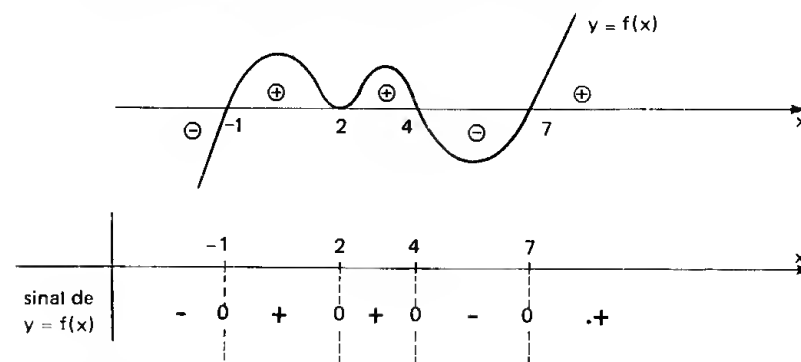
147 Exemplo

Estudar o sinal da função $y = f(x)$ cujo gráfico está abaixo representado.



Observemos, inicialmente, que interessa o comportamento da curva $y = f(x)$ em relação ao eixo dos x , não importando a posição do eixo dos y .

Preparando o gráfico com aspecto prático, temos:



Conclusão:

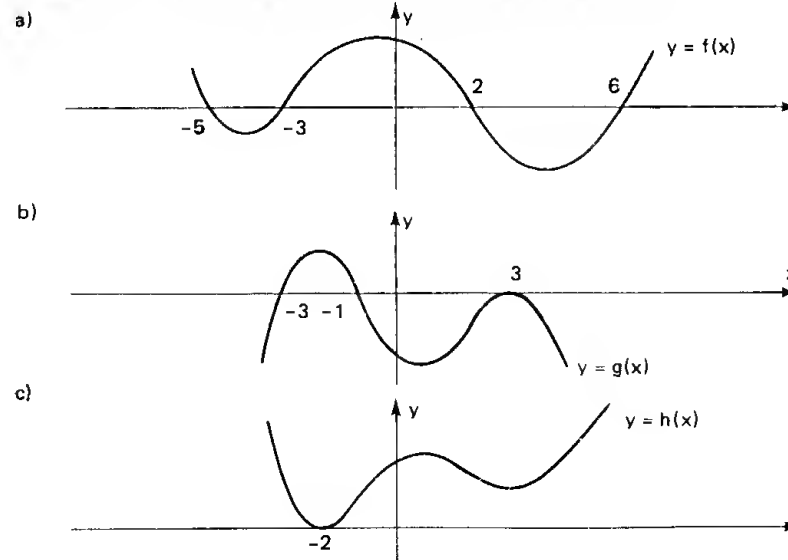
$$f(x) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = 7$$

$$f(x) > 0 \iff -1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 4 \text{ ou } x > 7$$

$$f(x) < 0 \iff x < -1 \text{ ou } 4 < x < 7.$$

EXERCÍCIO

A.157 Estudar o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.



XII. SINAL DA FUNÇÃO AFIM

Considerando que $x = -\frac{b}{a}$, zero da função afim $f(x) = ax + b$, o valor de x para o qual $f(x) = 0$, examinemos, então, para que valores ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

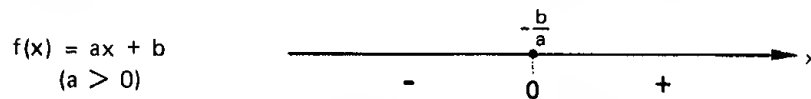
Devemos considerar dois casos.

148. 1º caso: $a > 0$

$$f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

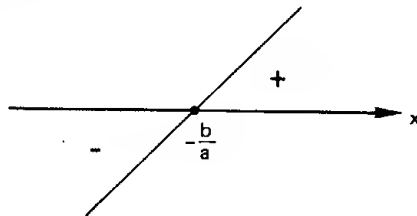
Colocando os valores de x sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, é:



Um outro processo para analisarmos a variação do sinal da função afim é construir o gráfico cartesiano.

Lembremos que na função afim $f(x) = ax + b$ o gráfico cartesiano é uma reta e, se o coeficiente angular a é positivo, a função é crescente.

Construindo o gráfico de $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, e lembrando que não importa a posição do eixo y , temos:

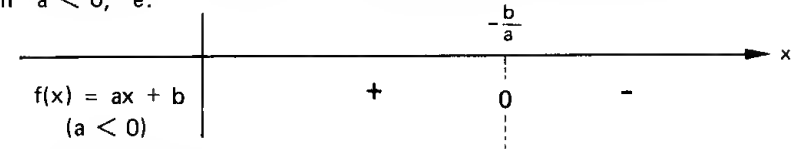


149. 2º caso: $a < 0$

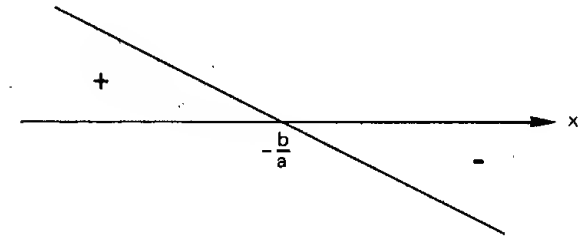
$$f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

Colocando os valores de x sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$ com $a < 0$, é:



Podemos analisar o sinal da função $f(x) = ax + b$ com $a < 0$, construindo o gráfico cartesiano. Lembremos que neste caso a função é decrescente.



150. Resumo

1) A função afim $f(x) = ax + b$ anula-se para $x = -\frac{b}{a}$.

2) Para $x > -\frac{b}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } a > 0 & \text{então } f(x) = ax + b > 0 \\ \text{se } a < 0 & \text{então } f(x) = ax + b < 0 \end{cases}$$

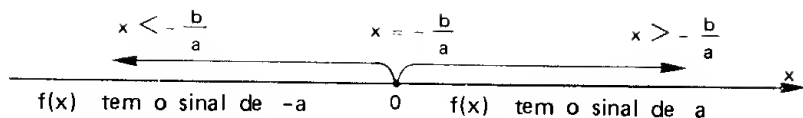
isto é, para $x > -\frac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de a .

3) Para $x < -\frac{b}{a}$, temos:

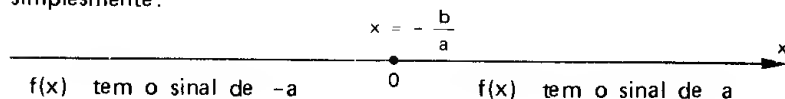
$$\begin{cases} \text{se } a > 0 & \text{então } f(x) = ax + b < 0 \\ \text{se } a < 0 & \text{então } f(x) = ax + b > 0 \end{cases}$$

isto é, para $x < -\frac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de $-a$ (sinal contrário ao de a).

Se colocarmos os valores de x sobre um eixo, a regra dos sinais da função afim, pode ser assim representada:



ou, simplesmente:



151. Exemplos

1º) Estudar os sinais da função $f(x) = 2x - 1$.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$a = 2 \Rightarrow a > 0 \text{ e } -a < 0$$

Logo:

$$\text{para } x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0 \text{ (sinal de } a = 2 > 0)$$

$$\text{para } x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0 \text{ (sinal de } -a = -2 < 0)$$

Fazendo o esquema gráfico, temos



2º) Estudar os sinais de $f(x) = -2x + 4$.

Temos

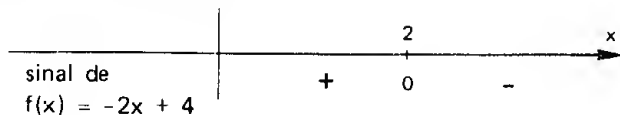
$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$a = -2 \Rightarrow a < 0 \text{ e } -a > 0$$

$$\text{para } x > 2 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ (sinal de } a = -2 < 0)$$

$$\text{para } x < 2 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ (sinal de } -a = 2 > 0)$$

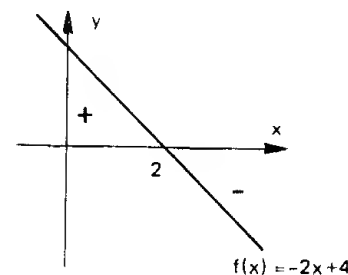
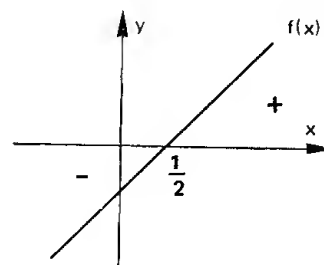
Fazendo o esquema gráfico



152. Um outro processo para analisarmos a variação do sinal da função afim é construir o gráfico cartesiano.

Lembremos que na função afim $f(x) = ax + b$ o gráfico cartesiano é uma reta e a função é crescente (decrescente) se o coeficiente angular a é positivo (negativo).

Assim nos dois últimos exemplos, temos:



EXERCÍCIOS

A.158 Estudar os sinais das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 - x$

d) $y = 5 + x$

e) $y = 3 - \frac{x}{2}$

f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

g) $y = 2x - \frac{4}{3}$

h) $y = -x$

A.159 Seja a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2, são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

$$x > \frac{7}{4}$$

A.160 Para que valores do domínio da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$ a imagem é menor que 4?

A.161 Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

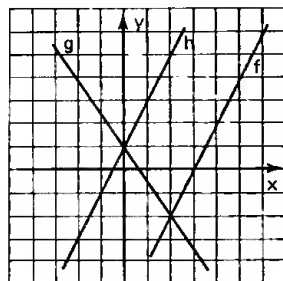
A.162 Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x - 1}{2}$ definidas

em \mathbb{R} . Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

- a) $f(x) \geq g(x)$? b) $g(x) < h(x)$? c) $f(x) \geq h(x)$?

A.163 Dados os gráficos das funções f , g e h definidas em \mathbb{R} . Determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

- a) $f(x) > g(x)$
b) $g(x) \leq h(x)$
c) $f(x) \geq h(x)$
d) $g(x) > 4$
e) $f(x) \leq 0$



XIII. INEQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

153. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x , separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \textcircled{I} \\ g(x) < h(x) & \textcircled{II} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto-solução de \textcircled{I} e S_2 o conjunto-solução de \textcircled{II} , o conjunto-solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

154. Exemplo

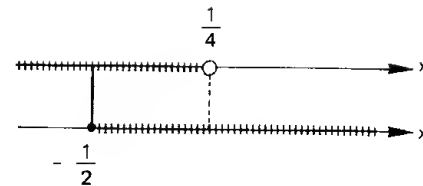
$$\text{Resolver } \underbrace{3x + 2 < -x + 3}_{\textcircled{I}} \underbrace{\leq x + 4}_{\textcircled{II}}$$

Temos que resolver duas inequações:

- $\textcircled{I} \quad 3x + 2 < -x + 3 \implies 4x < 1 \implies x < \frac{1}{4}$
 $\textcircled{II} \quad -x + 3 \leq x + 4 \implies -2x \leq 1 \implies x \geq -\frac{1}{2}$

A interseção desses dois conjuntos é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4} \right\}$$



EXERCÍCIOS

A.164 Resolver as inequações em \mathbb{R} :

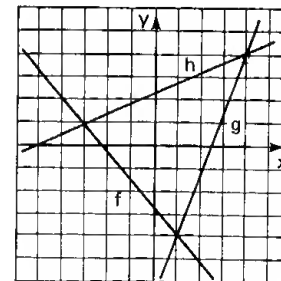
- a) $-2 < 3x - 1 < 4$ d) $x + 1 \leq 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$
b) $-4 < 4 - 2x \leq 3$ e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$
c) $-3 < 3x - 2 < x$ f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

A.165 Resolver os sistemas de inequações em \mathbb{R} :

- a) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leq 2x - 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geq 4x - 5 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x + 2 \geq 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2x - 5}{1 - x} \leq -2 \\ \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$

A.166 Com base nos gráficos das funções f , g e h definidas em \mathbb{R} , determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que

- a) $f(x) < g(x) \leq h(x)$
b) $g(x) \leq f(x) < h(x)$
c) $h(x) \leq f(x) < g(x)$



XIV. INEQUAÇÕES-PRODUTO

155. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x , as inequações $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ são denominadas *inequações-produto*.

156. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto-solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, tem o mesmo sinal.

Assim, são possíveis dois casos:

1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto-solução do sistema.

2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto-solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto-solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$

157. Exemplo

Resolver em \mathbb{R} a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$.

Analisando os dois casos possíveis

1º caso

Cada um dos fatores é positivo, isto é:

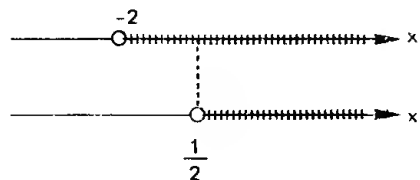
$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

e

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

A intersecção das duas soluções é

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}$$



2º caso

Cada um dos fatores é negativo, isto é:

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

e

$$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

A intersecção das duas soluções é:

$$S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

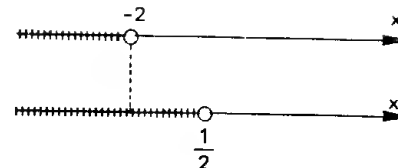
O conjunto-solução da inequação

$$(x + 2)(2x - 1) > 0 \text{ é:}$$

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

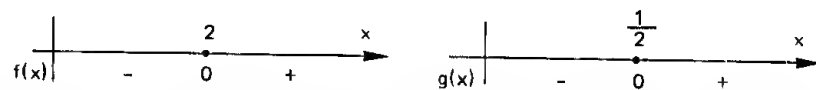
portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$$



158. Vejamos, um outro processo, mais prático para resolvermos a inequação $(x + 2) \cdot (2x - 1) > 0$ em \mathbb{R} .

Fazemos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$



Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo dos sinais do produto $f(x) \cdot g(x)$, usaremos o quadro abaixo, que denominamos *quadro-produto*, no qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto.

	-2	$\frac{1}{2}$	x		
f(x)	-	0	-	+	
g(x)	-	-	0	+	
f(x) · g(x)	+	0	-	0	+
	-2	$\frac{1}{2}$			

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$$

117-A

2º) "toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo", isto é

$$a^{2n} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim sendo, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \iff \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) \leq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos

$$1^\circ) (3x - 2)^3 > 0 \implies 3x - 2 > 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\}$$

$$2^\circ) (4x - 3)^6 > 0 \implies 4x - 3 \neq 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\}$$

$$3^\circ) (2x + 1)^5 < 0 \implies 2x + 1 < 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\}$$

$$4^\circ) (x - 2)^4 < 0 \implies S = \emptyset$$

$$5^\circ) (3 - 5x)^7 \geq 0 \implies 3 - 5x \geq 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{5}\}$$

$$6^\circ) (4x - 5)^2 \geq 0 \implies S = \mathbb{R}$$

$$7^\circ) (8 - 2x)^4 \leq 0 \implies 8 - 2x = 0 \implies S = \{4\}$$

EXERCÍCIOS

A.167 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

- a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$ b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
 c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$ d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
 e) $(6x - 1)(2x + 7) \geq 0$ f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leq 0$
 g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geq 0$ h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leq 0$

A.168 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

- a) $(x - 3)^4 > 0$ b) $(3x + 8)^3 < 0$
 c) $(4 - 5x)^6 < 0$ d) $(1 - 7x)^5 > 0$
 e) $(3x + 5)^2 \geq 0$ f) $(5x + 1)^3 \leq 0$
 g) $(4 + 3x)^4 \leq 0$ h) $(3x - 8)^5 \geq 0$

A.169 Resolver em \mathbb{R} a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então, o sinal de $(x - 3)^5$ é igual ao sinal de $x - 3$, isto é:



A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é positivo se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é nulo se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:



Fazendo o quadro-produto, temos:

	$-\frac{3}{2}$	3	
$f(x)$	-	0	+
$g(x)$	+	0	+
$f(x) \cdot g(x)$	-	0	+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -\frac{3}{2}\}$$

A.170 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

- a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geq 0$
 b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$
 c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leq 0$
 d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geq 0$

XV. INEQUAÇÕES-QUOCIENTE

162. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x , as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

são denominadas *inequações-quociente*.

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

163. Exemplo

Resolver em \mathbb{R} a inequação $\frac{3x+4}{1-x} \leq 2$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{1-x} \leq 2 &\Rightarrow \frac{3x+4}{1-x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+4-2(1-x)}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5x+2}{1-x} \leq 0 \end{aligned}$$

Fazendo o quadro-quociente, temos

	$-\frac{2}{5}$		1	
$f(x) = 5x + 2$	-	0	+	+
$g(x) = 1 - x$	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	0	+	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\}$$

Podemos resolver a inequação $\frac{3x+4}{1-x} \leq 2$, multiplicando por $h(x) = 1 - x$ e examinando dois casos:

a) $h(x) = 1 - x > 0$, isto é, $x < 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leq 2 \Rightarrow 3x+4 \leq 2(1-x) \Rightarrow x \leq -\frac{2}{5}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5}\}$$

b) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leq 2 \Rightarrow 3x+4 \geq 2(1-x) \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{2}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\}$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

A.171 Resolver as inequações em \mathbb{R} :

a) $\frac{2x+1}{x+2} > 0$

b) $\frac{3x-2}{3-2x} < 0$

c) $\frac{3-4x}{5x+1} \geq 0$

d) $\frac{-3-2x}{3x+1} \leq 0$

A.172 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

a) $\frac{5x-3}{3x-4} > -1$

b) $\frac{5x-2}{3x+4} < 2$

c) $\frac{x-1}{x+1} \geq 3$

d) $\frac{3x-5}{2x-4} \leq 1$

A.173 Resolver as inequações em \mathbb{R} :

a) $\frac{(1-2x)(3+4x)}{(4-x)} > 0$

b) $\frac{(3x+1)}{(2x+5)(5x+3)} < 0$

c) $\frac{(5x+4)(4x+1)}{(5-4x)} \geq 0$

d) $\frac{(1-2x)}{(5-x)(3-x)} \leq 0$

A.174 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

a) $\frac{1}{x-4} < \frac{2}{x+3}$

b) $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x-2}$

c) $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$

d) $\frac{x+5}{3x+2} \leq \frac{x-2}{3x+5}$

e) $\frac{5x+2}{4x-1} > \frac{5x-1}{4x+5}$

f) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} < 0$

g) $\frac{2}{3x-1} \geq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

Jovem luta para ser ouvido

Niels Henrik Abel de família numerosa e pobre, era filho do pastor da pequena aldeia de Findo, na Noruega.

Aos 17 anos, seu professor insistiu para que lesse as grandes obras matemáticas, inclusive as “*Disquisitiones*” (Pesquisas) de Gauss. Nesta época, Abel conseguiu generalizar o teorema binomial que Euler só havia provado para potências racionais.

Aos 18 anos perdeu o pai e suas responsabilidades ficaram maiores quanto à família, mas mesmo assim continuou pesquisando e, em 1824, publicou um artigo a prova de que se o grau de uma equação é maior que quatro, não existe uma fórmula geral em função de seus coeficientes para achar suas raízes. Esta era uma dúvida que preocupava os matemáticos há muito tempo e que agora estava resolvida. Uma prova neste aspecto foi dada por Ruffini, anteriormente, mas passou despercebida e por isso hoje conhecemos este resultado como o “Teorema de Abel-Ruffini”, um dos mais importantes da Matemática.

Seu nome também está ligado a grupos abelianos, ou comutativos, e alguns de seus resultados foram publicados no *Jornal de Crelle*.

Em 1826, Abel visitou Legendre e Cauchy em Paris, numa tentativa de mostrar suas descobertas mas não obteve êxito e numa de suas cartas a um amigo escreveu “Todo principiante tem muita dificuldade em se fazer notar aqui. Acabei um extenso tratado sobre certas classes de funções transcendentais mas M. Cauchy não se dignou a olhá-lo”.

Abel esperava obter um posto de professor em alguma Universidade e por isso deixou suas memórias com Cauchy para que fossem examinadas mas este logo as perdeu e ficaram esquecidas.

Devido à falta de recursos morreu aos 26 anos, de tuberculose, deixando profundos e importantes resultados em Álgebra e Teoria dos Números.

Dois dias após sua morte chegou finalmente a carta informando que havia sido nomeado professor na Universidade de Berlim.

Em 1830, Cauchy achou os manuscritos de Abel que foram publicados em 1841 pelo Instituto Francês e que Legendre classificou como “um monumento mais durável que o bronze”, contendo importantes generalizações sobre funções elípticas.



Niels H. Abel
(1802 — 1829)

CAPÍTULO VII

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

I. DEFINIÇÃO

164. Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função quadrática* ou do *2º grau* quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$. Isto é: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Exemplos de funções quadráticas:

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ | onde $a = 1, \quad b = -3, \quad c = 2$ |
| b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ | onde $a = 2, \quad b = 4, \quad c = -3$ |
| c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ | onde $a = -3, \quad b = 5, \quad c = -1$ |
| d) $f(x) = x^2 - 4$ | onde $a = 1, \quad b = 0, \quad c = -4$ |
| e) $f(x) = -2x^2 + 5x$ | onde $a = -2, \quad b = 5, \quad c = 0$ |
| f) $f(x) = -3x^2$ | onde $a = -3, \quad b = 0, \quad c = 0$ |

II. PARÁBOLA

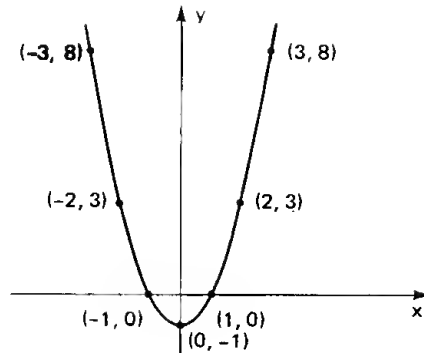
165. O gráfico da função quadrática é uma parábola. (*)

(*) Isto é provado mais adiante no volume de Geometria Analítica desta coleção.

Exemplos

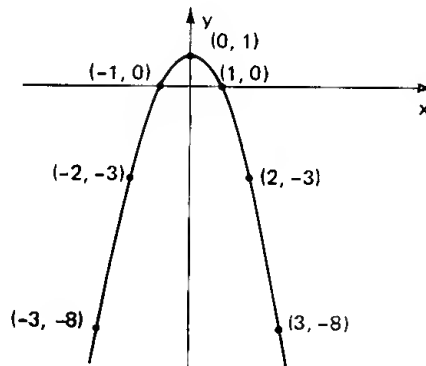
1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$

x	$y = x^2 - 1$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8



2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$

x	$y = -x^2 + 1$
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8



EXERCÍCIOS

A.175 Construir os gráficos das funções definidas em \mathbb{R} :

- $y = x^2$
- $y = -x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = -2x^2$
- $y = x^2 - 2x$
- $y = -2x^2 - 4x$
- $y = -3x^2 - 3$
- $y = x^2 - 2x + 4$

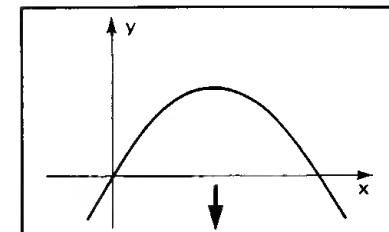
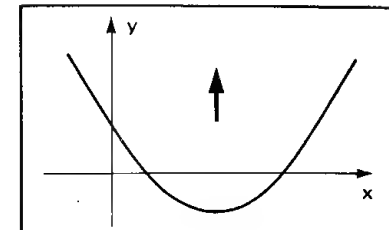
A.176 Determinar uma função quadrática f tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

III. CONCAVIDADE

166. A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo".

Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.



IV. FORMA CANÔNICA

167. A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores x e y , como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a x alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinada função quadrática os valores de abscissa (valores de x) onde a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros.

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos inicialmente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada *forma canônica*.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ , também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

V. ZEROS

168. Definição

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \iff$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

169. Discussão

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas que são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais que são

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3º) $\Delta < 0$, considerando que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

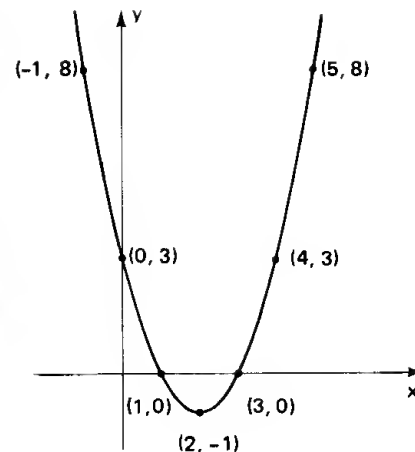
170. Resumo

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

171. Interpretando geometricamente, diremos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x .

Exemplo

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



EXERCÍCIOS

A.177 Determinar os zeros reais das funções:

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
- $f(x) = x^2 - 2x + 2$
- $f(x) = x^2 + 4x + 4$
- $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$
- $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
- $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
- $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$
- $f(x) = 2x^2 - 4x$
- $f(x) = -3x^2 + 6$
- $f(x) = 4x^2 + 3$
- $f(x) = -5x^2$

A.178 (MAPOFEI-76) Resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

A.179 Determinar os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cujas soluções são $z = 4$ ou $z = -1$ mas $z = x^2$, então:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

A.180 Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$

c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$

f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$

g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$

h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

A.181 Determinar os valores de m para que a função quadrática

$$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$$
 tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$$a = m, b = 2m - 1, c = m - 2 \text{ e } \Delta = 4m + 1.$$

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos então:

$$a = m \neq 0 \text{ e } \Delta = 4m + 1 > 0$$

ou seja

$$m \neq 0 \text{ e } m > -\frac{1}{4}$$

A.182 Determinar os valores de m para que a função quadrática

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$$
 tenha dois zeros reais e distintos.

A.183 Determinar os valores de m para que a equação do 2º grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

A.184 Determinar os valores de m para que a função

$$f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$$
 tenha um zero real duplo.

A.185 Determinar os valores de m para que a equação

$$x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$$
 tenha duas raízes reais iguais.

A.186 Determinar os valores de m para que a função

$$f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$$
 não tenha zeros reais.

A.187 Determinar os valores de m para que a equação

$$mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$$
 não tenha raízes reais.

A.188 Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2 ,

temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e para produto P das raízes

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

A.189 Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$ de raízes x_1 e x_2 , calcular:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

A.190 Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

A.191 Obter uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e -3

b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) 0,4 e 5

d) 1 e $-\sqrt{2}$

e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

A.192 Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2 , obter a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$

b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$

c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$

d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

A.193 Determinar m na equação $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ para que se tenha

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4,$$
 onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

VI. MÁXIMO E MÍNIMO

172. Definição

Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ ($y_m \in \text{Im}(f)$) é o *valor de máximo (mínimo)* da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ ($y_m \leq y$) para qualquer $y \in \text{Im}(f)$ e o valor de $x_M \in D(f)$ ($x_m \in D(f)$) tal que $y_M = f(x_M)$ ($y_m = f(x_m)$) é chamado *ponto de máximo (mínimo)* da função.

173. Teorema

"A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo (mínimo) $y = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ ($a > 0$)".

Demonstração

Consideremos a função quadrática na forma canônica

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (1)$$

Considerando que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\frac{-\Delta}{4a^2}$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ ($a > 0$) e a diferença

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

for a menor possível, isto é

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ em (1) temos

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \frac{-\Delta}{4a}$$

174. Exemplos

1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$ temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}.$$

2º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}$$

VII. VÉRTICE DA PARÁBOLA

175. Definição

O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é chamado *vértice* da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

A.194 Determinar o valor máximo ou o valor mínimo, e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em \mathbb{R} .

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

A.195 Determinar o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

A.196 Determinar o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m-1)x + (m+1)$ para que o valor máximo seja 2.

A.197 Determinar o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m-1)x + (m+2)$ para que o valor máximo seja 2.

A.198 Determine o valor de m na função real $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

A.199 Dentre todos os números reais de soma 8 determine aqueles cujo produto é máximo

Solução

Indicando por x e z esses números e por y o seu produto, temos:

$$x + z = 8 \quad y = x \cdot z.$$

Como precisamos ficar com uma só das variáveis x ou z , fazemos

$$x + z = 8 \Rightarrow z = 8 - x$$

e portanto

$$y = x \cdot z \Rightarrow y = x(8 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 8x.$$

Como $a = -1 < 0$, y é máximo quando

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 4.$$

Substituindo em $z = 8 - x$ vem $z = 4$.

Logo, os números procurados são 4 e 4.

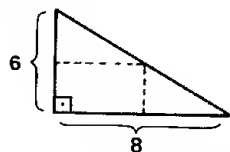
A.200 Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

A.201 Dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine o de área máxima.

A.202 Dentre todos os números de soma 6 determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

A.203 Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

A.204 É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determinar esse retângulo sabendo que a área é máxima.



A.205 Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

A.206 Num triângulo isósceles de base 6 cm e altura 4 cm está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

A.207 Determinar os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 3x$

c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

VIII. IMAGEM

176. Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

ou seja $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Observemos que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então temos que considerar dois casos:

1º) caso

$$a > 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \text{ e, portanto:}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

2º) caso

$$a < 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0 \text{ e, portanto,}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Resumindo:

$$a > 0 \Rightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow y \leq -\frac{\Delta}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

177. Provemos agora que a imagem da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\} \quad \text{para } a > 0$$

e

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a}\} \quad \text{para } a < 0.$$

Vamos provar só para o caso em que $a > 0$.

Para provarmos que a imagem da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\}$ para $a > 0$, devemos mostrar que qualquer que seja $y \in \text{Im}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = ax^2 + bx + c$.

De fato, seja $y \in \text{Im}$, então podemos escrever

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

ou seja:

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 \quad (1)$$

Como $y \geq \frac{-\Delta}{4a}$, temos $y + \frac{\Delta}{4a} \geq 0$, isto é, o primeiro membro da igualdade (1) é não negativo, logo o segundo membro também o será, isto é,

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$$

e como $a > 0$, temos:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$$

que é uma inequação do segundo grau com solução $x \in \mathbb{R}$.

178. Exemplos

1º) Obter a imagem da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Na função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, temos:

$$a = 2, \quad b = -8 \quad \text{e} \quad c = 6$$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16$$

$$\text{e portanto: } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$$

Como $a = 2 > 0$, temos: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$

2º) Obter a imagem da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$.

Na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$, temos:

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = -\frac{5}{3}$$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{5}{3}) = \frac{16}{9}$$

e portanto:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{16}{9}}{4(-\frac{1}{3})} = \frac{4}{3}$$

Como $a = -\frac{1}{3} < 0$, temos: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{4}{3}\}$

EXERCÍCIOS

A.208 Determinar a imagem das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = 3x^2 - 9x + 6$

d) $y = -4x^2 + 8x + 12$

e) $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

f) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

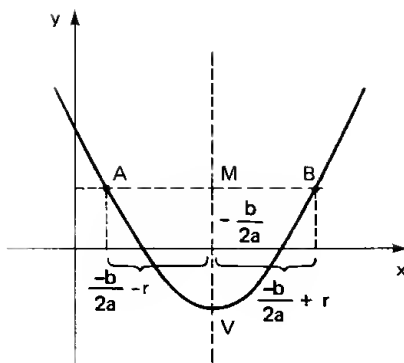
A.209 Determinar m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ definida em \mathbb{R} para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$.

A.210 Determinar m na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + mx - \frac{1}{2}$ definida em \mathbb{R} para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 7\}$.

IX. EIXO DE SIMETRIA

179. "O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice".

Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice da parábola obedecem a equação $x = \frac{-b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta tem abscissa $\frac{-b}{2a}$.



Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = \frac{-b}{2a}$, devemos mostrar que dado um ponto $A(\frac{-b}{2a} - r, y)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B(\frac{-b}{2a} + r, y)$ também pertencente ao gráfico da função.

Tomando a função quadrática na forma canônica

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

e considerando que $A(\frac{-b}{2a} - r, y)$ pertence ao gráfico da função temos:

$$y = f(\frac{-b}{2a} - r) = a[(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] =$$

$$= a[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = f(\frac{-b}{2a} + r)$$

provando que $B(\frac{-b}{2a} + r, y)$ também pertence ao gráfico da função.

X. GRÁFICO

180. Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, buscaremos, daqui para a frente, informações preliminares que são:

1º) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \frac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x .

2º) Se $a > 0$ ($a < 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima (baixo).

3º) Zeros da função

Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos

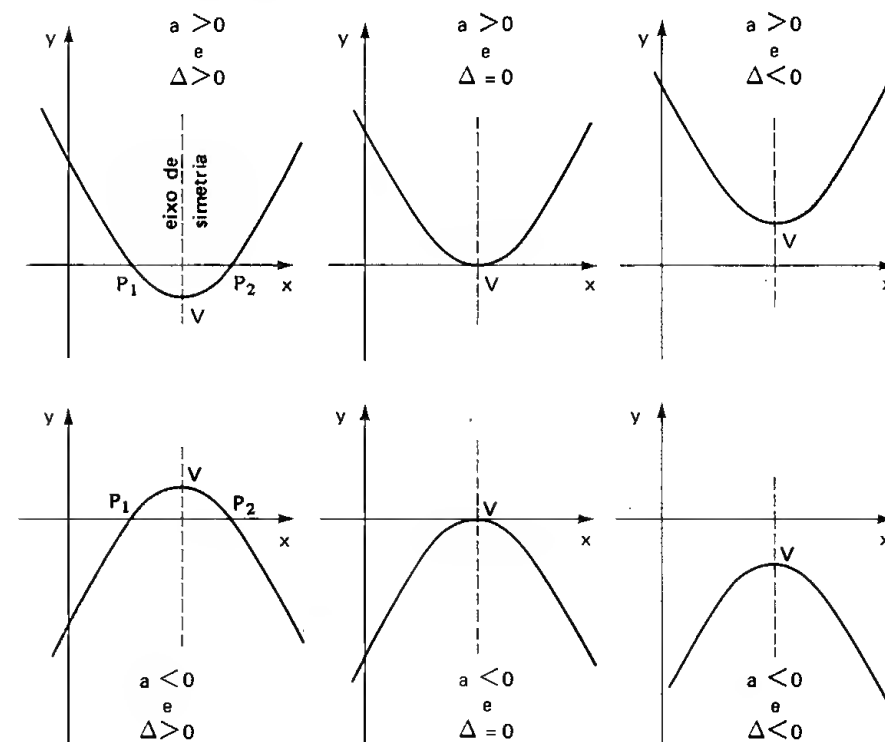
$$P_1(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0) \quad \text{e} \quad P_2(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$$

Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P(\frac{-b}{2a}, 0)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x .

4º) Vértice da parábola é o ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ que é máximo se $a < 0$ ou é mínimo se $a > 0$.

Seguem-se os tipos de gráficos que poderemos obter:



EXERCÍCIOS

A.211 Fazer o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$ a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$

Vértice

Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos

$$a = 1, b = -4, c = 3 \text{ e } \Delta = 4$$

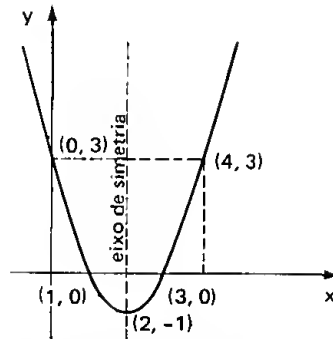
$$\text{como } \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ e } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1,$$

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico

Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y . Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y , podemos determinar um outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação a reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).



A.212 Fazer o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

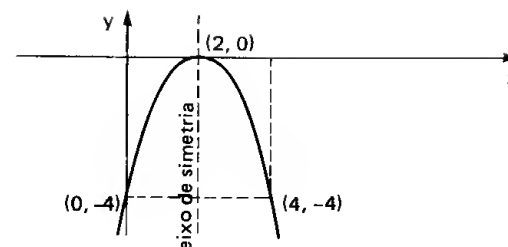
$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

A parábola admite um único ponto no eixo x que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x , então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico



A.213 Fazer o esboço do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -1 < 0 \Rightarrow \text{nenhuma raiz real.}$$

A parábola não tem pontos no eixo dos x .

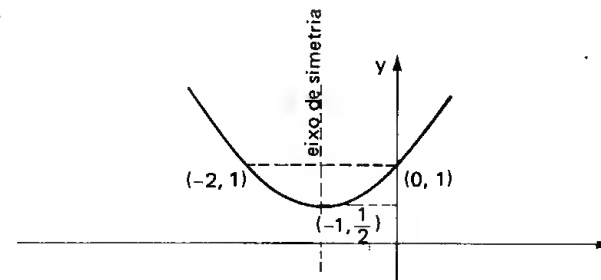
Vértice

Em $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, temos:

$$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1 \text{ e } \Delta = -1.$$

$$\text{Como } \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 \text{ e } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ o vértice é } V(-1, \frac{1}{2}).$$

Gráfico



A.214 Construir o gráfico cartesiano das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

g) $y = -x^2 + x - 1$

h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

XI. SINAL

181. Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

e vamos resolver o problema: "para que valores de $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$a) f(x) > 0; \quad b) f(x) < 0; \quad c) f(x) = 0?"$$

Resolver este problema significa estudar o sinal da função quadrática para cada $x \in \mathbb{R}$.

Na determinação do sinal da função quadrática, devemos começar pelo cálculo do discriminante Δ , quando três casos distintos podem aparecer:

$$a) \Delta < 0 \quad b) \Delta = 0 \quad c) \Delta > 0$$

Vejam como prosseguir em cada caso.

182. 1º Caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ então $-\Delta > 0$.

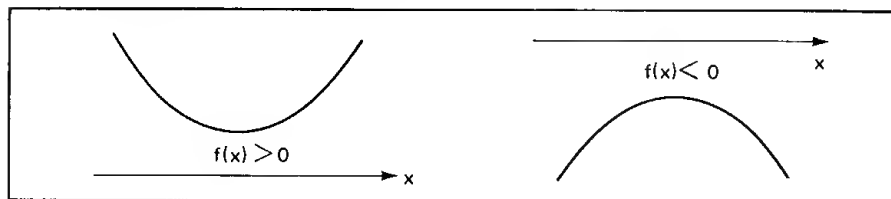
Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] \Rightarrow a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Isto significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 &\Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$ vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2º) $f(x) = -x^2 + x - 1$ apresenta $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ e, como $a = -1 < 0$, concluímos que

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

183. 2º Caso: $\Delta = 0$

Da forma canônica, temos:

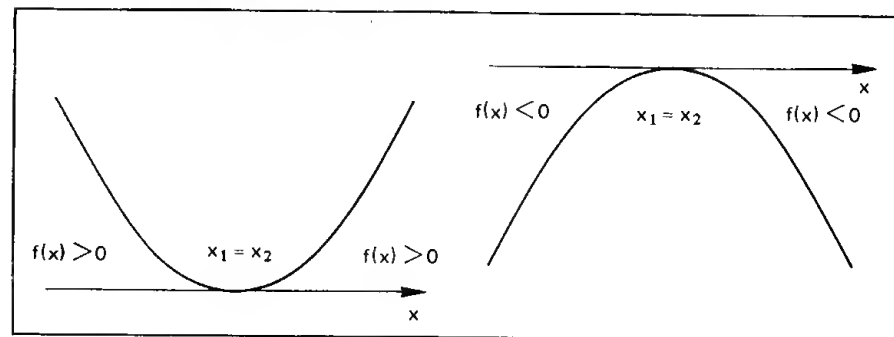
$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{positivo}} - \underbrace{\left(\frac{0}{4a^2}\right)}_{\text{zero}} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

então $a \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Isto significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$ sendo $x_1 = \frac{-b}{2a}$ zero duplo de $f(x)$, ou melhor:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 &\Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, então $f(x)$ tem um zero duplo $x_1 = \frac{-b}{2a} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$ apresenta $\Delta = 8^2 - 4(-2) \cdot (-8) = 0$, então $f(x)$ tem um zero duplo para $x_1 = \frac{-b}{2a} = 2$ e, como $a = -2 < 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) < 0, & \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

184. 3º caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]$$

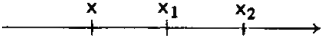
Lembramos que a fórmula que dá as raízes de uma equação do segundo grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ isto é } \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

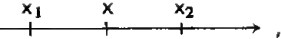
fica evidente que a forma canônica se transforma em:

$$af(x) = a^2 \left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = a^2 (x - x_1)(x - x_2).$$


O sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Admitindo $x_1 < x_2$, temos que:

1) se $x < x_1$ , temos:

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\ominus} > 0$$

2) se $x_1 < x < x_2$ , temos:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\ominus} < 0$$

3) se $x > x_2$ , temos:

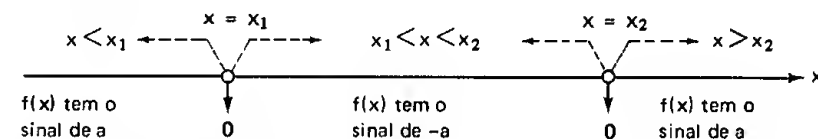
$$x > x_2 > x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\oplus} > 0$$

Isto significa que:

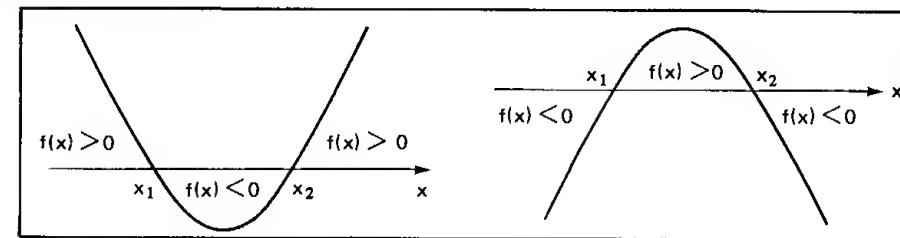
1) O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x , tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;

2) O sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$ para todo x , tal que $x_1 < x < x_2$.

Em resumo:



O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta > 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos

1º) $f(x) = x^2 - x - 6$ apresenta $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$, então $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < -2 \text{ ou } x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -2 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para } -2 < x < 3. \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$, logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIO

A.215 Estudar os sinais de cada uma das funções do exercício A.214.

XII. INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

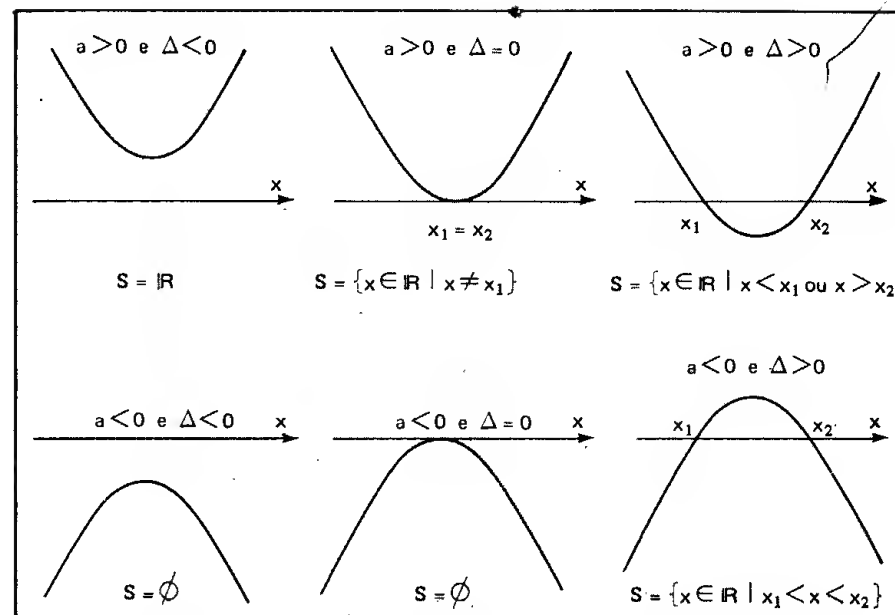
185. Se $a \neq 0$ as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ e $ax^2 + bx + c \leq 0$ são denominadas *inequações do 2º grau*.

Resolver, por exemplo, a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?"

A resposta a esta pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ podemos ter uma das seis respostas seguintes:



EXERCÍCIOS

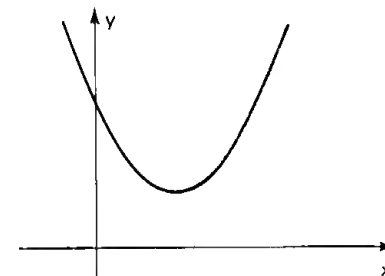
A.216 Resolver a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$ então $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

$$S = \mathbb{R}.$$



A.217 Resolver a inequação $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

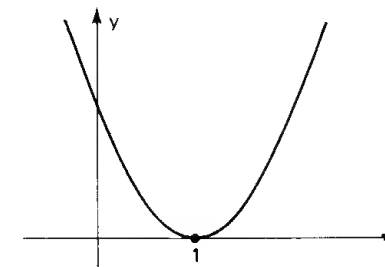
Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo $x = \frac{-b}{2a} = 1$, então

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \leq 0$, vem:

$$S = \{1\}.$$



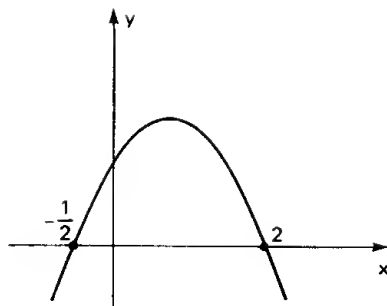
A.218 Resolver a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os

zeros $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$, então

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) \geq 0$, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$$

A.219 Resolver as inequações em \mathbb{R} :

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

c) $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$

d) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geq 0$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leq 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

g) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

h) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

i) $x^2 + 3x + 7 > 0$

j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$

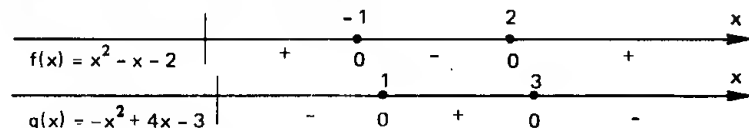
k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$

l) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0$

A.220 Resolver a inequação $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:



Fazendo o quadro-produto, vem

	-1	1	2	3	
$f(x) = x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	-	0	+	0	-
$f(x) \cdot g(x)$	-	0	+	0	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$$

A.221 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

a) $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$

b) $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leq 0$

c) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$

d) $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geq 0$

e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leq 0$

A.222 (MAPOFEI-71) É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5)(x^2 - 2x + 2)$.

Determinar:

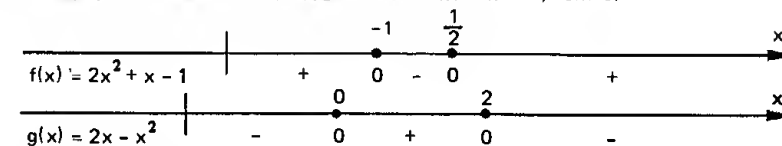
a) os pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas.

b) o conjunto dos valores de x para os quais $y \leq 0$.

A.223 Resolver a inequação $\frac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leq 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:



Fazendo o quadro-quociente, vem

	-1	0	1/2	2	
$f(x) = 2x^2 + x - 1$	+	0	-	0	+
$g(x) = 2x - x^2$	-	0	+	0	-
$f(x) \cdot g(x)$	-	0	+	0	-

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$$

A.224 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

a) $\frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\frac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leq 0$

c) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

d) $\frac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

e) $\frac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geq 1$

f) $\frac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

g) $\frac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geq -1$

h) $\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} > 1$

A.225 Resolver as inequações:

- a) $4 < x^2 - 12 \leq 4x$
- b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$
- c) $0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$
- d) $7x + 1 < x^2 + 3x - 4 \leq 2x + 2$
- e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$
- f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4$

A.226 Resolver os sistemas de inequações:

- a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x^2 + x - 20 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 1 + 2x \geq 0 \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 \end{cases}$

A.227 Resolver a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Fazendo $z = x^2$ temos

$$z^2 - 5z + 4 \geq 0 \Rightarrow z \leq 1 \text{ ou } z \geq 4$$

mas $z = x^2$, portanto:

$$(x^2 \leq 1 \text{ ou } x^2 \geq 4) \Rightarrow (x^2 - 1 \leq 0 \text{ ou } x^2 - 4 \geq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2)$$

$$\text{logo } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

A.228 Resolver em \mathbb{R} as inequações:

- a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$
- b) $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$
- c) $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$
- d) $2x^4 - 3x^2 + 4 < 0$
- e) $x^6 - 7x^3 - 8 \geq 0$
- f) $3x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

XIII. TEOREMA

186. A condição necessária e suficiente para que o trinômio do 2º grau

$f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante em \mathbb{R} é que $\Delta < 0$.

Este teorema é uma consequência das propriedades de sinal de

$f(x) = ax^2 + bx + c$ já estudadas. Observemos que:

- a) $\Delta < 0$ e $a > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- b) $\Delta < 0$ e $a < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

187. Exemplo

Determinar m de modo que a função quadrática

$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m + 1)$ seja positiva para todo x real.

Devemos ter simultaneamente $\Delta < 0$ e $a > 0$, portanto

$$1^\circ) \Delta = b^2 - 4ac = (2m - 1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m + 1) =$$

$$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m = -8m + 1 < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{8}$$

e

$$2^\circ) a = m > 0 \Rightarrow m > 0$$

Como as condições são simultâneas, concluímos que

$$(f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow m > \frac{1}{8}.$$

EXERCÍCIOS

A.229 Determinar m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$.

- a) $x^2 + (2m - 1)x + (m^2 - 2) > 0$
- b) $x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3) \geq 0$
- c) $x^2 - mx + m > 0$
- d) $x^2 + (m + 1)x + m > 0$
- e) $-x^2 + (m + 2)x - (m + 3) \geq 0$
- f) $(m - 1)x^2 + 4(m - 1)x + m > 0$
- g) $mx^2 + (m - 2)x + m \leq 0$
- h) $mx^2 + (m + 3)x + m \geq 0$
- i) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 1) < 0$
- j) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 > 0$

A.230 Determinar m para que se tenha $\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução

Considerando que $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer x real, multiplicamos ambos os membros de $\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ por $(x^2 + x + 1)$, mantendo a desigualdade.

Então:

$$\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m + 1)x + 1 < 2(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + (m - 1)x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Devemos ter $\Delta < 0$, portanto:

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Resposta: $-1 < m < 3$.

A.231 Determinar m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} < 2$

b) $\frac{x^2 - mx + 2}{x^2 - x + 2} > m$

c) $\frac{x}{x^2 + 4} > \frac{x + m}{x^2 + 1}$

d) $-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$

XIV. COMPARAÇÃO DE UM NÚMERO REAL COM AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

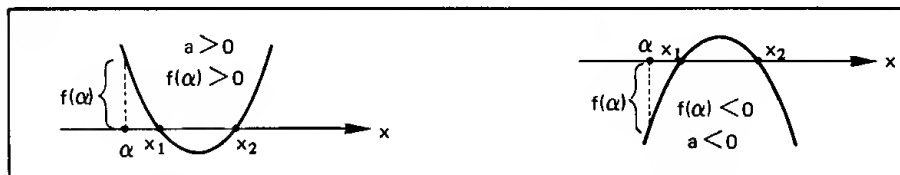
188. Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leq x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é verificar se:

- 1) $\alpha < x_1 \leq x_2$ (α está à esquerda de x_1)
- 2) $x_1 < \alpha < x_2$ (α está entre as raízes)
- 3) $x_1 \leq x_2 < \alpha$ (α está à direita de x_2)
- 4) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$ (α é uma das raízes)

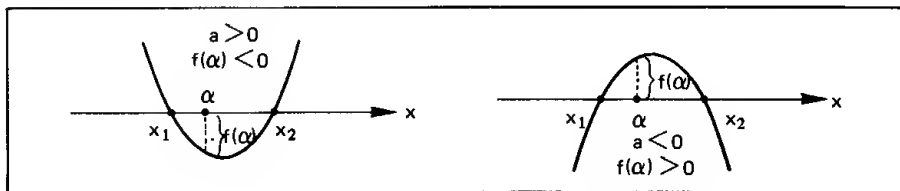
sem calcular as raízes.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já discutimos neste capítulo, temos que:

a) se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 , o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, isto é: a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ tem o mesmo sinal.



b) se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$) o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, isto é: a e $f(\alpha)$ tem sinais contrários.



c) se α é zero de $f(x)$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

189. Resumo

Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

- 1) $\alpha < x_1 \leq x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- 2) $x_1 < \alpha < x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$
- 3) $x_1 \leq x_2 < \alpha \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- 4) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) = 0$

Observemos que nos casos 1, 3 e 4 o discriminante é $\Delta \geq 0$ enquanto que no caso 2 temos $\Delta > 0$.

Inversamente, conhecendo o sinal do produto $a \cdot f(\alpha)$, que conclusão podemos tirar da existência de raízes reais da equação $f(x) = 0$ e qual a posição de α em relação às mesmas raízes?

É o que veremos em seguida.

190. Teorema 1

Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e α está compreendido entre eles.

$$H\{a \cdot f(\alpha) < 0 \quad T\{\Delta > 0 \text{ e } x_1 < \alpha < x_2$$

Demonstração

1º) Se fosse $\Delta \leq 0$, teríamos: $a \cdot f(\alpha) \geq 0, \forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

o que é absurdo, pois contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluimos, então, que $\Delta > 0$, isto é, $f(x)$ tem dois zeros x_1 e x_2 , reais e distintos.

2º) Se o real α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 ou for um zero de $f(x)$, teremos $a \cdot f(\alpha) \geq 0$, o que contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluimos, então que α está compreendido entre x_1 e x_2 .

Exemplo

Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Temos $a = 3$, $\alpha = 1$ e $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, então

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1) = -3 < 0.$$

Conclusão: $\Delta > 0$ e $x_1 < 1 < x_2$.

191. Teorema 2

Se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, então α está à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 .

$$H \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \text{ou} \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \quad T \begin{cases} \alpha < x_1 \leq x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \leq x_2 < \alpha \end{cases}$$

Demonstração

Se $\Delta > 0$ e $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, então $a \cdot f(\alpha) \leq 0$, o que contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $\alpha = x_1 = x_2$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, o que também contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Concluimos que $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Notemos que, se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, o teorema 2 garante que $\alpha \notin [x_1, x_2]$, mas não indica se α está à esquerda desse intervalo ($\alpha < x_1 \leq x_2$) ou à direita dele ($x_1 \leq x_2 < \alpha$). Para verificarmos qual dessas duas situações está ocorrendo, devemos comparar α com um número qualquer que esteja entre as raízes. Para facilitar os cálculos vamos utilizar o número $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$, que é a média aritmética das raízes x_1 e x_2 , pois:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq x_2 \Rightarrow x_1 \leq \frac{S}{2} \leq x_2$$

Calculando $\frac{S}{2} = \frac{-b}{2a}$, temos duas possibilidades a examinar:

1ª) se $\alpha < \frac{S}{2}$ então α está à esquerda de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à esquerda de x_1 ;

$$\alpha < \frac{S}{2} \Rightarrow \alpha < x_1 \leq x_2$$


2ª) se $\alpha > \frac{S}{2}$, então, α está à direita de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à direita de x_2 ;

$$\alpha > \frac{S}{2} \Rightarrow x_1 \leq x_2 < \alpha$$


Exemplos

1º) Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 + 4x - 3 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 52 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) &= 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 + 4 - 3) = 12 > 0 \\ \frac{S}{2} &= \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{3} < 1 = \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < 1$$

2º) Comparar o número 0 com as raízes da equação $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 20 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) &= 4 \cdot f(0) = 4 \cdot 1 = 4 > 0 \\ \frac{S}{2} &= \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$$

192. Resumo

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta zeros reais $x_1 \leq x_2$ e α é um número real que vai ser comparado a x_1 e x_2 , temos:

$$\begin{aligned} \text{a) } a \cdot f(\alpha) < 0 &\xrightarrow{T-1} x_1 < \alpha < x_2 \\ \text{b) } a \cdot f(\alpha) = 0 &\xrightarrow{T-1} \alpha \text{ é uma das raízes} \\ \text{c) } a \cdot f(\alpha) > 0 \text{ e } \Delta \geq 0 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 \leq x_2 & \text{se } \alpha < \frac{S}{2} \\ x_1 \leq x_2 < \alpha & \text{se } \alpha > \frac{S}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

A.232 Determinar m de modo que o número 1 esteja compreendido entre as raízes da equação: $mx^2 + (m-1)x - m = 0$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 + (m-1)x - m$.

Para que aconteça $x_1 < 1 < x_2$ onde, x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 + (m-1)x - m = 0$, devemos ter:

$$af(1) < 0 \Rightarrow \frac{m}{a} \underbrace{[m \cdot 1^2 + (m-1) \cdot 1 - m]}_{f(1)} < 0$$

$$\Rightarrow m \cdot (m-1) < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

Resposta: $0 < m < 1$.

A.233 Determinar m de modo que o número α esteja compreendido entre as raízes da equação:

- a) $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ e $\alpha = 2$
 b) $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$ e $\alpha = -1$
 c) $mx^2 + (m - 1)x + (m + 2) = 0$ e $\alpha = 0$
 d) $(m^2 - 1)x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0$ e $\alpha = 1$

A.234 (MAPOFEI-75) Determinar os valores de m na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

A.235 (MAPOFEI-74) Determinar m para que a equação: $(m - 2)x^2 - 3mx + (m + 2) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.

A.236 Determinar m de modo que a equação $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m$.

Para que aconteça $-1 < x_1 < x_2$, onde x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(-1) > 0, \quad \Delta > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > -1.$$

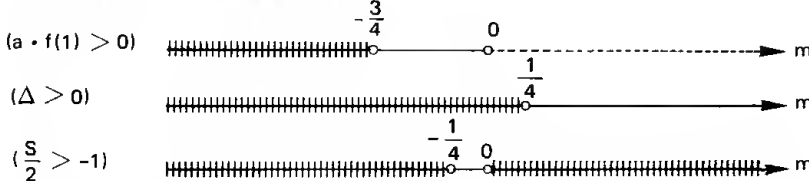
Analisando separadamente cada condição:

$$1^a) a \cdot f(-1) > 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{a} \cdot \underbrace{[m(-1)^2 - (2m + 1) \cdot (-1) + 2 + m]}_{f(-1)} > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot (4m + 3) > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad m > 0.$$

$$2^a) \Delta > 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4 \cdot m(2 + m) > 0 \Rightarrow -4m + 1 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4}.$$

$$3^a) \frac{S}{2} > -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{2m} > -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{2m} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4m + 1}{2m} > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m < -\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad m > 0.$$

Representando os valores encontrados sobre um eixo



Como as três condições são simultâneas, fazendo a intersecção dos intervalos acima vamos encontrar:

$$m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0 < m < \frac{1}{4} \quad \text{que é a resposta.}$$

A.237 Determinar m de modo que a equação $(m - 3)x^2 + 2(m - 2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

A.238 Determinar m de modo que a equação $(m - 1)x^2 - mx - 2m - 2 = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

A.239 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 2$.

A.240 Determinar m para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

A.241 Determinar m para que a equação do 2º grau $3x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 1 < x_2 < 4$.

A.242 Determinar m para que a equação do 2º grau $(2m + 1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 4$.

A.243 Determinar m na equação do 2º grau $(3m - 2)x^2 + 2mx + 3m = 0$ para que tenha uma única raiz entre -1 e 0 .

A.244 Determinar m na equação do 2º grau $mx^2 - 2(m - 1)x - m - 1 = 0$ para que se tenha uma única raiz entre -1 e 2 .

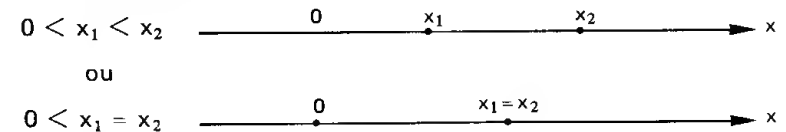
XV. SINAIS DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Estudar os sinais das raízes de uma equação do 2º grau é comparar o número zero às raízes x_1 e x_2 da equação dada.

Podem ocorrer três situações:

193. 1ª) as raízes são positivas

Neste caso, temos:



De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > 0$$

Notemos que, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$a) a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow P > 0$$

onde $P = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes da equação do 2º grau.

$$b) \frac{S}{2} > 0 \Rightarrow S > 0$$

onde $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação do 2º grau.

Assim, sendo, uma equação do 2º grau tem raízes positivas somente se:

$$\Delta \geq 0 \text{ e } P > 0 \text{ e } S > 0$$

isto é, se as raízes forem reais, com produto positivo e soma positiva.

194. 2ª) as raízes são negativas

Neste caso, temos:

$$x_1 < x_2 < 0 \quad \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad 0 \\ \text{-----} \end{array} \quad x$$

ou

$$x_1 = x_2 < 0 \quad \begin{array}{c} x_1 = x_2 \quad 0 \\ \text{-----} \end{array} \quad x$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geq 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0 \text{ e } \frac{S}{2} < 0$$

Isto também pode ser escrito assim:

$$\Delta \geq 0 \text{ e } P > 0 \text{ e } S < 0$$

195. 3ª) as raízes têm sinais contrários

Neste caso, temos:

$$x_1 < 0 < x_2$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$a \cdot f(0) < 0 \text{ ou } P < 0.$$

196. Exemplo

Determinar os valores de m na equação do 2º grau

$$(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$$

para que as raízes reais sejam distintas e positivas.

Como a equação é do 2º grau, devemos ter, inicialmente

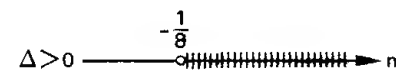
$$m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

e, se as raízes são distintas e positivas ($0 < x_1 < x_2$), então:

$\Delta > 0$ (pelo fato de as raízes serem reais e distintas) e $S > 0$ e $P > 0$ (pelo fato de estas raízes serem positivas).

Analisando cada condição:

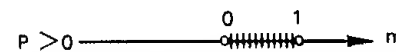
$$\begin{aligned} \Delta &= (2m + 1)^2 - 4(m - 1) \cdot m = \\ &= 8m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{8} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \frac{-b}{a} = \frac{-(2m + 1)}{m - 1} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P &= \frac{c}{a} = \frac{m}{m - 1} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < m < 1 \end{aligned}$$



Fazendo a intersecção das três condições, vem $0 < m < 1$ que é a resposta.

EXERCÍCIOS

A.245 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ tenha raízes negativas.

A.246 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ tenha raízes positivas.

A.247 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $(m - 2)x^2 + (3m - 1)x + (m + 1) = 0$ tenha raízes de sinais contrários.

A.248 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ admita raízes negativas.

A.249 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $(m^2 - 4)x^2 + mx + m - 3 = 0$ admita raízes de sinais contrários.

A.250 Determinar m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ admita raízes positivas.

As margens dos livros falam

Pierre Simon de Fermat nasceu na França e estudou Direito em Toulouse, aí participando do Parlamento. Embora muito ocupado, encontrou tempo para estudar Literatura Clássica, Ciências e Matemática, por puro prazer.

Em 1629 iniciou suas descobertas matemáticas depois de ter-se dedicado à restauração de obras perdidas da Antigüidade.

Baseando-se na coleção Matemática de Pappus, descobriu o princípio fundamental da Geometria Analítica: sempre que numa equação se encontram duas variáveis, os pontos que satisfazem à equação formam uma curva.

Em curto tratado, *"Introdução aos lugares planos e sólidos"*, dá ênfase ao esboço de soluções de equações, começando com uma equação linear e um sistema de coordenadas arbitrário sobre o qual a esboçou. Como apêndice desta obra escreve "A solução de problemas sólidos por meio de lugares", observando a solução de equações cúbicas e quadráticas.

Os trabalhos de Fermat eram muito mais sistemáticos e didáticos do que os de Descartes e sua Geometria Analítica aproxima-se da atual, tendo em mente a existência de mais de duas ou três dimensões, o que nunca conseguiu provar.

Apesar de não conhecer o conceito de limite, em sua obra *"Método para achar máximos e mínimos"* aproxima-se bastante do cálculo de hoje. Também seu método para mudar a variável e considerar valores vizinhos é essencial em Análise Infinitesimal, usando-o para achar tangentes de curvas. Ainda em Análise, contribuiu com quadraturas, volumes, comprimentos de curvas e centro de gravidade.

Com a restauração do livro *"A Aritmética"*, de Diofante, muito pouco prático e com muitos algoritmos, Fermat passou a desenvolver um importante ramo da Matemática, a Teoria dos Números, da qual é considerado fundador e onde principalmente cuidou dos números primos.

Sua matemática estava escrita em apontamentos desorganizados, em margens de livros ou em cartas que ele não tinha intenção de publicar.

Fermat é considerado o príncipe dos amadores em Matemática, sempre com muitas descobertas mas que perderam sua prioridade pois, devido à sua modéstia, quase nada foi publicado.



Pierre S. de Fermat
(1601 — 1665)

CAPÍTULO VIII

FUNÇÃO MODULAR

I. FUNÇÃO DEFINIDA POR VÁRIAS SENTENÇAS ABERTAS

Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da f .

197. Exemplos

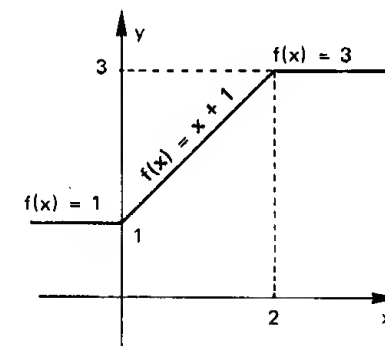
1.º) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{para } x < 0 \\ f(x) = x + 1 & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ f(x) = 3 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

O seu gráfico está representado ao lado.



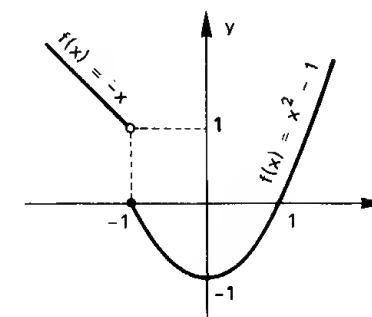
2.º) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{para } x < -1 \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$$

que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

O seu gráfico está representado ao lado.



EXERCÍCIOS

A.251 Construir o gráfico das funções definidas em \mathbb{R} :

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 + x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq -2 \\ x & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x > -2 \\ 1 & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad h) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A.252 (MAPOFEI-74) Esboçar o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A.253 Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{se } x > -2 \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$ determine os valores do domínio que têm imagem 4.

Solução

Para determinarmos o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$ resolvemos as equações

$$x^2 + x - 2 = 4 \implies x^2 + x - 6 = 0 \implies \begin{cases} x = -3 & (\text{não convém}) \\ x = 2 \end{cases}$$

e

$$-\frac{x}{2} + 1 = 4 \implies x = -6$$

logo, os valores do domínio são $x = 2$ ou $x = -6$.

A.254 Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{5}{2}x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ determine os valores do domínio que têm imagem 7.

II. MÓDULO

198. Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$, define-se *módulo* ou *valor absoluto* de x que se indica por $|x|$, através da relação

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Isto significa que:

- 1.º) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- 2.º) o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Assim, por exemplo, temos:

$$|+2| = +2, \quad |-7| = +7, \quad |0| = 0, \quad |-\frac{3}{5}| = +\frac{3}{5}, \quad |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2}, \quad |+\sqrt{3}| = +\sqrt{3}$$

199. Propriedades

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

- I. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- II. $|x| = 0 \iff x = 0$
- III. $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- IV. $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- V. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- VI. $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- VII. $|x| \leq a$ e $a > 0 \iff -a \leq x \leq a$
- VIII. $|x| \geq a$ e $a > 0 \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$

III. FUNÇÃO MODULAR

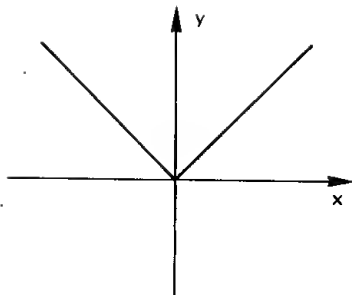
200. Definição

Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função módulo* ou *modular* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$\text{Isto é: } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|$$

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser definida também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



O gráfico da função modular é a reunião de duas semi-retas de origem O, que são as bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.

A imagem desta função é $\text{Im} = \mathbb{R}_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

EXERCÍCIOS

A.255 Construir os gráficos das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |3x|$

A.256 Construir o gráfico da função real definida por $f(x) = |x + 1|$.

Solução

Podemos construir o gráfico de $f(x) = |x + 1|$ por dois processos:

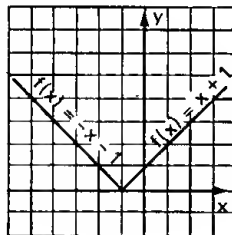
Primeiro Processo

Notemos que $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

então a função pode ser definida como uma função a duas sentenças ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

cujo gráfico está representado ao lado.



Segundo Processo

Para construirmos o gráfico de

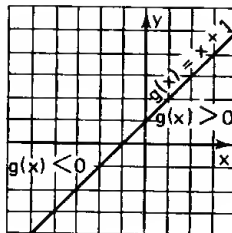
$$f(x) = |x + 1|,$$

fazemos inicialmente o gráfico da função $g(x) = x + 1$, que está representado ao lado.

Para obtermos o gráfico de

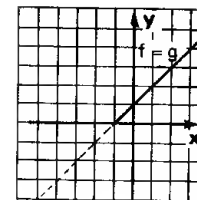
$$f(x) = |g(x)| = |x + 1|$$

fazemos em duas etapas:



Primeira Etapa

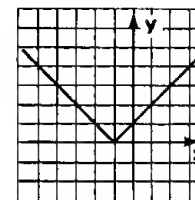
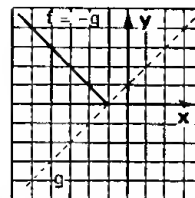
Se $g(x) \geq 0$, vamos ter $f(x) = |g(x)| = g(x)$, isto é, o gráfico da função f coincidirá com o gráfico da função g .



Segunda Etapa:

Se $g(x) < 0$, vamos ter $f(x) = |g(x)| = -g(x)$, isto é, o gráfico da função f será simétrico do gráfico da função g , relativamente ao eixo das abscissas.

Construindo os gráficos obtidos, nas duas etapas, no mesmo plano cartesiano temos o gráfico da função $f(x) = |x + 1|$.



A.257 Construir os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = |2x - 1|$

c) $f(x) = |2x + 3|$

d) $f(x) = |2 - 3x|$

e) $f(x) = |x^2 + 4x|$

f) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

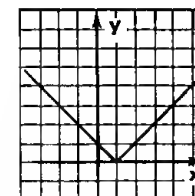
g) $f(x) = |4 - x^2|$

A.258 Construir o gráfico da função definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x - 1| + 2$

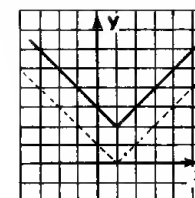
Solução

Construimos inicialmente o gráfico da função $g(x) = |x - 1|$

Para obtermos o gráfico de $f(x) = g(x) + 2$ deslocamos cada ponto do gráfico da função g duas unidades "para cima".



$$g(x) = |x - 1|$$



$$f(x) = |x - 1| + 2$$

A.259 Construir os gráficos das seguintes funções reais

a) $f(x) = |x| - 3$

b) $f(x) = |2x - 1| - 2$

c) $f(x) = |3x - 4| + 1$

d) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$

e) $f(x) = |x^2 - 4| + 3$

f) $f(x) = |x^2 + 4x + 3| - 1$

A.260 Construir o gráfico da função definida em \mathbb{R} $f(x) = |x + 2| + x - 1$.

Solução

Notemos que

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Devemos, então considerar dois casos

1º) quando $x \geq -2$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x + 2| + x - 1 = \\ &= x + 2 + x - 1 = 2x + 1 \end{aligned}$$

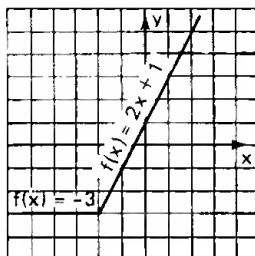
2º) quando $x < -2$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x + 2| + x - 1 = \\ &= -x - 2 + x - 1 = -3. \end{aligned}$$

Anotando a função f como uma função definida a duas sentenças, vem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

cujo gráfico está ao lado.



A.261 Construir os gráficos das funções reais abaixo.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = x + x$ | b) $f(x) = x - x$ |
| c) $f(x) = x - 3 + x + 2$ | d) $f(x) = x + 1 - x + 3$ |
| e) $f(x) = 2x - 1 + x - 2$ | f) $f(x) = 3x + 2 - 2x + 3$ |
| g) $f(x) = x^2 - 4 x + 3$ | h) $f(x) = x^2 - 2 x - 3 $ |
| i) $f(x) = x^2 - 2x + x + 2$ | |

A.262 Construir o gráfico da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em \mathbb{R}^* .

A.263 Construir o gráfico da função $f(x) = \frac{|x - 1|}{1 - x}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

A.264 Construir o gráfico da função definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$$

Solução

$$\text{Notemos que } |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{e } |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Devemos então, considerar 3 casos:

1º) quando $x < -\frac{1}{2}$, temos $f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = -2x - 1 - x + 1 = -3x$

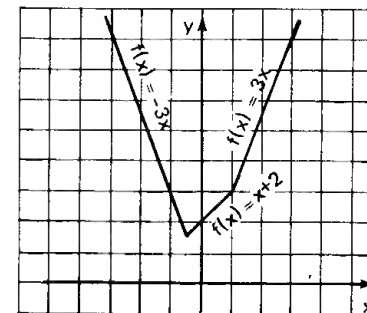
2º) quando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$, temos $f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 - x + 1 = x + 2$

3º) quando $x \geq 1$, temos $f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 + x - 1 = 3x$

Anotando a função f como uma função definida a várias sentenças vem:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ x + 2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

cujo gráfico está ao lado.



A.265 Construir os gráficos das seguintes funções reais:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $f(x) = x + 1 + x - 1 $ | b) $f(x) = x + 1 - x - 1 $ |
| c) $f(x) = 2x - 2 + x + 3 $ | d) $f(x) = 3x + 3 - 2x - 3 $ |
| e) $f(x) = x^2 - 4 - x - 2 $ | f) $f(x) = \frac{ x^2 - 2x - x^2 - 4 }{2}$ |

A.266 Construir o gráfico da função definida em \mathbb{R}

$$f(x) = ||2x - 2| - 4|$$

Solução

Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = |2x - 2| - 4$.

Analisemos as duas possibilidades

1º) Se $g(x) \geq 0$, temos:

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

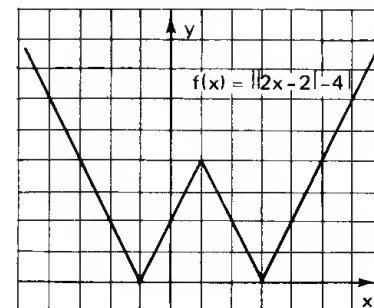
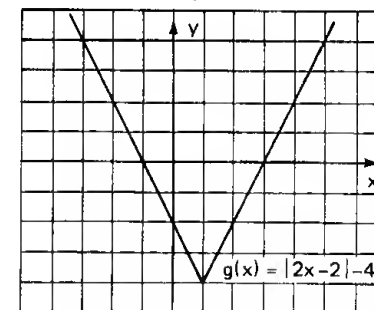
isto é, o gráfico da função f coincidirá com o gráfico da função g .

2º) Se $g(x) < 0$, temos:

$$f(x) = |g(x)| = -g(x)$$

isto é, o gráfico da função f é o oposto do gráfico da função g .

Considerando as duas possibilidades e representando num mesmo plano cartesiano temos:



A.267 Construir os gráficos das funções reais:

- a) $f(x) = ||x| - 2|$
- b) $f(x) = ||2x + 3| - 2|$
- c) $f(x) = ||x^2 - 1| - 3|$
- d) $f(x) = ||x - 1| + x - 3|$
- e) $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$
- f) $f(x) = ||x + 2| - |x - 2||$
- g) $f(x) = ||3x - 3| - |2x + 1||$

IV. EQUAÇÕES MODULARES

Lembremos da propriedade do módulo dos números reais, para $k > 0$

$$|x| = k \iff x = k \text{ ou } x = -k$$

e, utilizando essa propriedade, vamos resolver algumas equações modulares.

201. Exemplos

1º) Resolver $|2x - 1| = 3$

Então

$$|2x - 1| = 3 \implies \begin{cases} 2x - 1 = 3 \implies x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -3 \implies x = -1 \end{cases}$$

$$S = \{2, -1\}$$

2º) Resolver $|3x - 1| = |2x + 3|$

Lembrando da propriedade

$$|a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

temos:

$$|3x - 1| = |2x + 3| \iff \begin{cases} 3x - 1 = 2x + 3 \implies x = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2x - 3 \implies x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$S = \{4, -\frac{2}{5}\}$$

3º) Resolver $|x + 1| = 3x + 2$

Devemos ter inicialmente

$$3x + 2 \geq 0 \implies x \geq -\frac{2}{3}$$

para que seja possível a igualdade.

Supondo $x \geq -\frac{2}{3}$ temos

$$|x + 1| = 3x + 2 \implies \begin{cases} x + 1 = 3x + 2 \implies x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 1 = -3x - 2 \implies x = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ (não convém)}$$

$$S = \{-\frac{1}{2}\}$$

EXERCÍCIOS

A.268 Resolver as seguintes equações em \mathbb{R} :

- a) $|x + 2| = 3$
- b) $|3x - 1| = 2$
- c) $|4x - 5| = 0$
- d) $|2x - 3| = -1$
- e) $|x^2 - 3x - 1| = 3$
- f) $|x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}| = \frac{5}{4}$
- g) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

A.269 Resolver em \mathbb{R} as seguintes equações:

- a) $|3x + 2| = |x - 1|$
- b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$
- c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$
- d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$

A.270 Resolver as seguintes equações em \mathbb{R} :

- a) $|x - 2| = 2x + 1$
- b) $|3x + 2| = 2x - 3$
- c) $|2x - 5| = x - 1$
- d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$
- e) $|3x - 2| = 3x - 2$
- f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

V. INEQUAÇÕES MODULARES

Lembrando das propriedades de módulo dos números reais, para $k > 0$:

- 1) $|x| < k \iff -k < x < k$
- 2) $|x| > k \iff x < -k \text{ ou } x > k$

e, utilizando essas propriedades, podemos resolver algumas inequações modulares.

202. Exemplos

1º) Resolver em \mathbb{R} : $|2x + 1| < 3$

Então:

$$|2x + 1| < 3 \implies -3 < 2x + 1 < 3 \implies -2 < x < 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$$

2º) Resolver em \mathbb{R} : $|4x - 3| > 5$

Então:

$$\begin{aligned} |4x - 3| > 5 &\implies (4x - 3 < -5 \text{ ou } 4x - 3 > 5) \implies \\ &\implies (x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2) \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}.$$

EXERCÍCIOS

A.271 Resolver em \mathbb{R} as inequações abaixo:

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a) $ 3x - 2 < 4$ | b) $ 2x - 3 \leq 1$ |
| c) $ 4 - 3x \leq 5$ | d) $ 3x + 4 \leq 0$ |
| e) $ 2x + 4 < -3$ | f) $ 2x - 1 > 3$ |
| g) $ 5x + 4 \geq 4$ | h) $ 2 - 3x \geq 1$ |
| i) $ 3x - 5 > 0$ | j) $ 4x - 7 \geq -1$ |
| k) $1 < x - 1 \leq 3$ | |

A.272 Resolver as inequações seguintes em \mathbb{R} :

- | | |
|---|---|
| a) $ x^2 - 5x + 5 < 1$ | b) $ x^2 - x - 4 > 2$ |
| c) $ x^2 - 5x \geq 6$ | d) $ x^2 - 3x - 4 \leq 6$ |
| e) $\left \frac{2x - 3}{3x - 1} \right > 2$ | f) $\left \frac{x + 1}{2x - 1} \right \leq 2$ |
| g) $ x - 2 > 1$ | h) $ 2x + 1 - 3 \geq 2$ |
| i) $ 2x - 1 - 4 \leq 3$ | |

A.273 Resolver em \mathbb{R} a inequação $2x - 7 + |x + 1| \geq 0$.

Solução

$$\text{Notando que } |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

devemos então, considerar dois casos:

1º) Se $x \geq -1$, temos:

$$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \implies 2x - 7 + x + 1 \geq 0 \iff x \geq 2$$

A solução S_1 é

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

2º) Se $x < -1$ temos:

$$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \implies 2x - 7 - x - 1 \geq 0 \implies x \geq 8.$$

A solução S_2 é

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = \emptyset$$

A solução da inequação proposta é

$$S = S_1 \cup S_2$$

e portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

A.274 Resolver em \mathbb{R} as seguintes inequações:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $ x - 1 - 3x + 7 \leq 0$ | b) $ 2x + 1 + 4 - 3x > 0$ |
| c) $ 3x - 2 + 2x - 3 \leq 0$ | d) $ x + 1 - x + 2 \geq 0$ |
| e) $ 3x - 4 + 2x + 1 < 0$ | f) $ x^2 - 4x - 3x + 6 \leq 0$ |
| g) $ x^2 - 6x + 5 + 1 < x$ | |

A.275 (MAPOFEI-76) Resolver a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

A.276 Resolver a inequação em \mathbb{R} $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$.

Solução

Notando que:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Construímos a tabela:

	0	3	x
$ 2x - 6 =$	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$ x =$	$-x$	x	x
$ 2x - 6 - x =$	$-x + 6$	$-3x + 6$	$x - 6$

$$|2x - 6| - |x| = \begin{cases} x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -3x + 6 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -x + 6 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Devemos considerar três casos:

1º) Se $x \geq 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$x - 6 \leq 4 - x \implies 2x \leq 10 \implies x \leq 5$$

A solução S_1 é

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

2º) Se $0 \leq x < 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-3x + 6 \leq 4 - x \implies -2x \leq -2 \implies x \geq 1$$

A solução S_2 é

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$$

3º) Se $x < 0$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-x + 6 \leq 4 - x \implies 6 \leq 4 \text{ que é absurdo. Logo a solução } S_3 \text{ é:}$$

$$S_3 = \emptyset$$

A solução da inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$ é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} \cup \emptyset$$

e portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

A.277 Resolver as seguintes inequações em \mathbb{R} :

- (a) $|x + 2| - |x - 3| > x$ b) $|3x + 2| - |2x - 1| > x + 1$
 c) $|x - 2| - |x + 4| \leq 1 - x$ d) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$
 e) $|x + 2| + |2x - 2| > x + 8$ f) $3(|x + 1| - |x - 1|) \leq 2x^2 - 4x$
 g) $|x - 2| - |x + 3| > x^2 - 4x + 3$

A.278 (MAPOFE1-75) Resolver a desigualdade $|x - 2| + |x - 4| \geq 6$.

OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

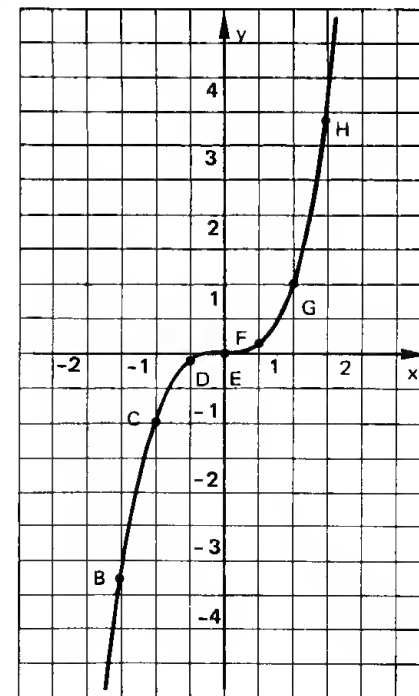
I. FUNÇÃO $f(x) = x^3$

203. Façamos um estudo da função f : de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que associa cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $x^3 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Isto é: } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3$$

Vamos inicialmente construir a tabela

x	x^3	ponto
-2	-8	A
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{27}{8}$	B
-1	-1	C
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	D
0	0	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	F
1	1	G
$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$	H
2	8	I
$\frac{5}{2}$	$\frac{125}{8}$	J
3	27	K



Observemos que a função $f(x) = x^3$:

a) é uma função crescente em \mathbb{R} , isto é:

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}) (x_1 < x_2 \implies x_1^3 < x_2^3)$$

b) tem imagem $\text{Im} = \mathbb{R}$ pois, qualquer que seja o $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^3$, isto é, $x = \sqrt[3]{y}$.

EXERCÍCIO

A.279 Fazer o esboço dos gráficos das seguintes funções definidas em \mathbb{R} .

- a) $f(x) = x^3 + 1$
- b) $f(x) = -x^3$
- c) $f(x) = 2 - x^3$
- d) $f(x) = (x + 1)^3$
- e) $f(x) = (2 - x)^3$
- f) $f(x) = (x - 1)^3 - 1$
- g) $f(x) = 2 + (1 - x)^3$
- h) $f(x) = |x^3|$

II. FUNÇÃO RECÍPROCA

204. Definição

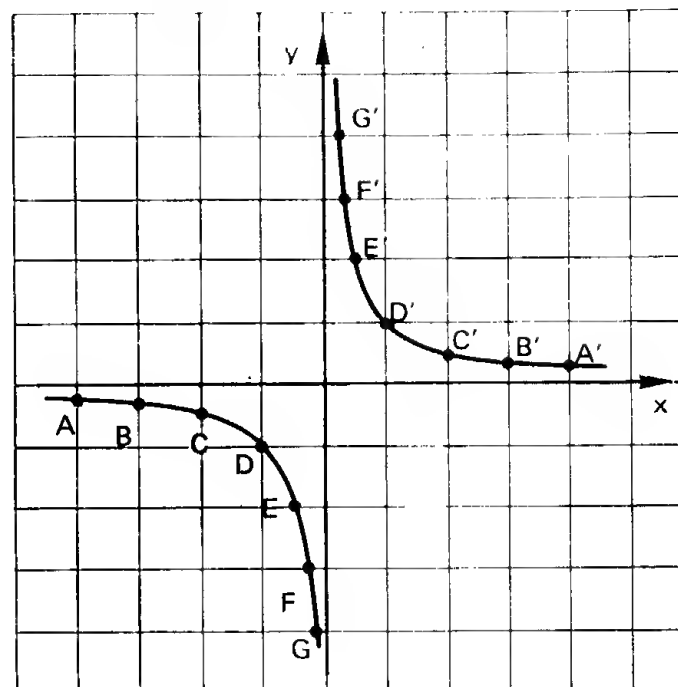
Uma aplicação f de \mathbb{R}^* em \mathbb{R} recebe o nome de *função recíproca* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ associa o elemento $\frac{1}{x}$.

Isto é: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Vamos inicialmente construir a tabela

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
ponto	A	B	C	D	E	F	G	G'	F'	E'	D'	C'	B'	A'



205. Observemos que a função recíproca $y = \frac{1}{x}$:

- a) não é definida para $x = 0$;
- b) tem imagem $\text{Im} = \mathbb{R}^*$ pois, dado um número real $y \neq 0$, sempre existe um x também real tal que $y = \frac{1}{x}$;
- c) tem por gráfico uma hipérbole equilátera^(*)

(*) Isto está provado em nosso livro de Geometria Analítica desta coleção.

EXERCÍCIOS

A.280 Fazer o esboço do gráfico das funções

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{2x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2x}$

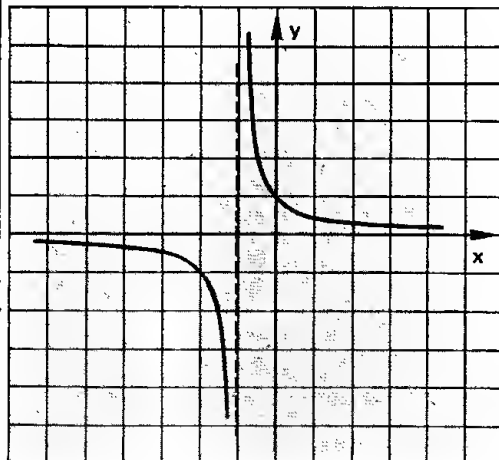
d) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

A.281 Fazer o esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x+1$, calculamos $\frac{1}{x+1}$ e finalmente calculamos x :

x	$x+1$	$y = \frac{1}{x+1}$
-4	-3	$-\frac{1}{3}$
-3	-2	$-\frac{1}{2}$
-2	-1	-1
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	3	$\frac{1}{3}$



A.282 Fazer o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

c) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$

A.283 Fazer o esboço gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$

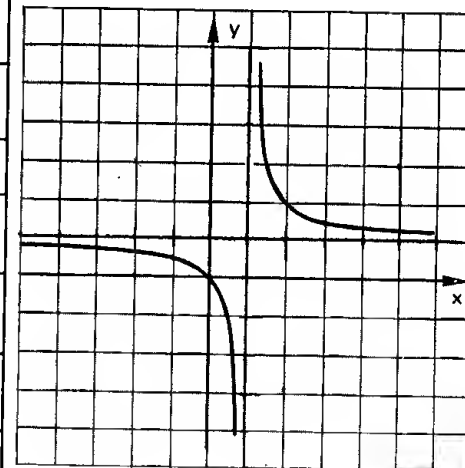
Solução

Observemos que:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Vamos construir a tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x-1$, calculamos $1 + \frac{1}{x-1}$ e finalmente x .

x	$x-1$	$y = 1 + \frac{1}{x-1}$
-2	-3	$\frac{2}{3}$
-1	-2	$\frac{1}{2}$
0	-1	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-2
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
2	1	2
3	2	$\frac{3}{2}$
4	3	$\frac{4}{3}$



A.284 Fazer o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

d) $f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right|$

A.285 (MAPOFEI-74) Calcular o valor aproximado da área limitada pela curva $y = \frac{2}{x}$ pelo eixo Ox e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. Use no cálculo três trapézios de bases contidas nas retas $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

III. FUNÇÃO MÁXIMO INTEIRO

206. Definição

Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de *função máximo inteiro* quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$ que é o maior inteiro que não supera x .

Isto é: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow [x]$

onde $[x]$ é o maior inteiro que não supera x .

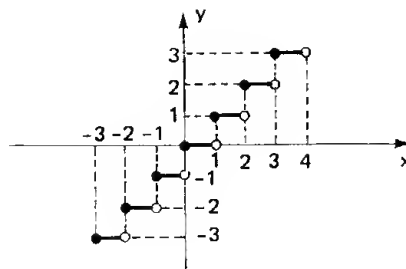
Assim, por exemplo:

$$[3,9] = \left[\frac{39}{10} \right] = 3, \quad [-0,7] = \left[-\frac{7}{10} \right] = -1 \quad \text{e} \quad [4] = 4.$$

Para construirmos o gráfico, notemos que

$$\begin{aligned} -3 \leq x < -2 &\implies y = [x] = -3 \\ -2 \leq x < -1 &\implies y = [x] = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\implies y = [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\implies y = [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\implies y = [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\implies y = [x] = 2 \\ 3 \leq x < 4 &\implies y = [x] = 3 \end{aligned}$$

etc.



A imagem da função máximo inteiro é o conjunto $\text{Im} = \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS

A.286 Construir o gráfico das seguintes funções definidas em \mathbb{R} .

a) $f(x) = 2[x]$

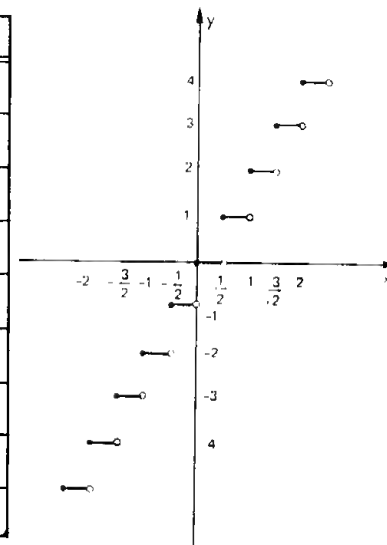
b) $f(x) = -[x]$

A.287 Construir o gráfico da função real definida por $f(x) = [2x]$

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x$, calculamos $[2x]$ e finalmente x .

x	$2x$	$y = [2x]$
$-2 \leq x < -1,5$	$-4 \leq 2x < -3$	-4
$-1,5 \leq x < -1$	$-3 \leq 2x < -2$	-3
$-1 \leq x < -0,5$	$-2 \leq 2x < -1$	-2
$-0,5 \leq x < 0$	$-1 \leq 2x < 0$	-1
$0 \leq x < 0,5$	$0 \leq 2x < 1$	0
$0,5 \leq x < 1$	$1 \leq 2x < 2$	1
$1 \leq x < 1,5$	$2 \leq 2x < 3$	2
$1,5 \leq x < 2$	$3 \leq 2x < 4$	3
$2 \leq x < 2,5$	$4 \leq 2x < 5$	4



A.288 Construir os gráficos das seguintes funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$

b) $f(x) = [-x]$

d) $f(x) = [|x|]$

c) $f(x) = [x - 1]$

e) $f(x) = [|x|]$

f) $f(x) = [x]^2$

g) $f(x) = x - [x]$

h) $f(x) = x + [x]$

Advogado envolvido com Álgebra

Arthur Cayley nasceu na Inglaterra.

Como estudante em Cambridge ganhou muitos prêmios em Matemática. Graduou-se em Trinity e dedicou-se ao Direito durante catorze anos, o que não impediu suas pesquisas matemáticas.

Em 1839 fundou-se na Inglaterra o "Cambridge Mathematical Journal", principal veículo de comunicação que contou com inúmeros artigos de Cayley assim como outros jornais científicos, característicos do século XIX.

Em 1843 criou a Geometria Analítica no espaço n -dimensional usando determinantes como instrumento básico e foi o primeiro a estudar matrizes, definindo matriz nula, matriz identidade a partir do que se pode pensar em operações sobre elas. Neste aspecto contou com a colaboração de Benjamin e Charles Peirce.

Em 1846, Cayley escreveu um artigo para o "Jornal de Crelle" estendendo o teorema de espaço tridimensional para um espaço de quatro dimensões.

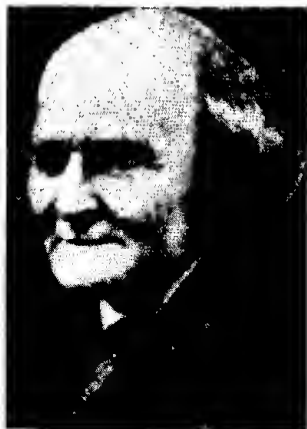
No "Philosophical Transaction" (Transação Filosófica) em 1868, publicou um desenvolvimento do plano cartesiano a duas dimensões como um espaço de cinco dimensões cujos elementos são as cônicas.

Em 1854 aceitou o cargo de professor em Cambridge e em 1881 profeiu uma série de conferências sobre funções abelianas e função theta.

Cayley escreveu muitos artigos sobre invariantes algébricos e principalmente nesta teoria teve a ajuda de seu amigo inseparável Sylvester, tanto que foram chamados "gêmeos invariantes".

Cayley era essencialmente um algebrista mas contribuiu também para a Geometria e em Análise escreveu "Ensaio sobre as funções elíticas".

Produziu quantidade imensa de artigos e obras durante sua vida, tanto que neste aspecto chega a competir com Cauchy e Euler.



Arthur Cayley
(1821 — 1895)

CAPÍTULO X

FUNÇÃO COMPOSTA FUNÇÃO INVERSA

I. FUNÇÃO COMPOSTA

207. Definição

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C ; chama-se *função composta* de g e f à função h de A em C definida por

$$h(x) = g(f(x))$$

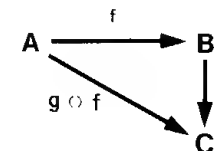
para todo x em A .

Indicaremos esta aplicação h por $g \circ f$ (lê-se: g composta com f ou g círculo f); portanto

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo x em A .

Podemos representar também a composta $g \circ f$ pelo diagrama.

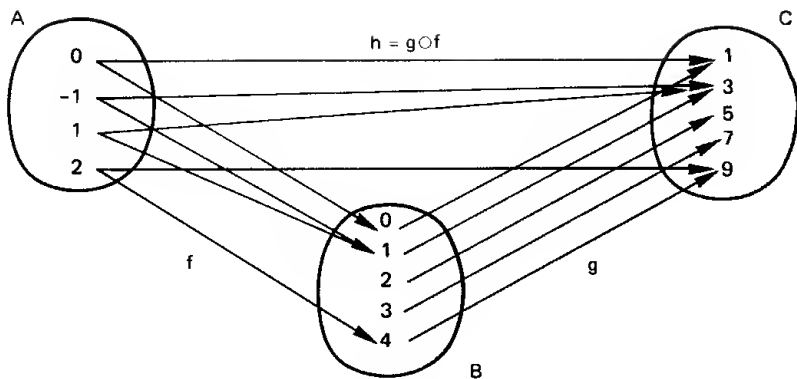


208. Exemplos

1º) Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções:

f , de A em B , definida por $f(x) = x^2$

g , de B em C , definida por $g(x) = 2x + 1$



observemos, por exemplo que: $f(2) = 4$, $g(4) = 9$ e $h(2) = 9$, isto é, $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta $h = g \circ f$, fazemos assim: $g(f(x))$ é obtida a partir de $g(x)$ trocando-se x por $f(x)$.

No exemplo dado, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1.$$

Se vamos calcular $h(2)$, fazemos deste modo:

$$h(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9.$$

2º) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

Notemos que a função composta $h_1 = g \circ f$ é definida por:

$$h_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3.$$

Notemos, por outro lado, que a função composta $h_2 = f \circ g$ é definida por:

$$h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + x + 1 + 1 = x^2 + x + 2.$$

209. Observações

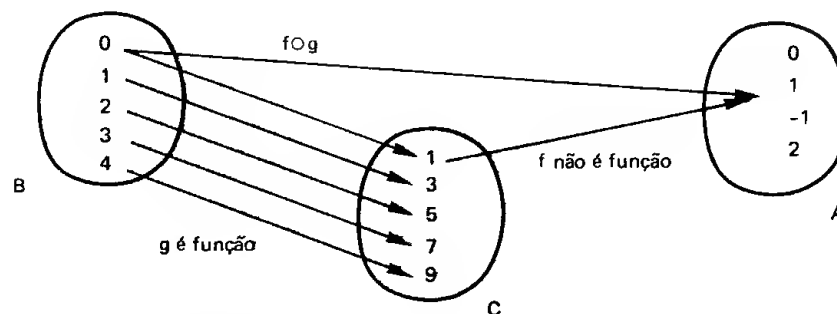
1ª) A composta $g \circ f$ só está definida quando o contra-domínio da f é igual ao domínio da g . Em particular se as funções f e g são de A em A então as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas e são funções de A em A .

2ª) Notemos que em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Pode acontecer que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida.

Assim, no primeiro exemplo, se tentarmos obter $f \circ g$ verificaremos que é impossível, pois:

g é função de B em C mas f não é função de C em A .



3ª) As duas composições $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas mas $f \circ g \neq g \circ f$ como nos mostra o segundo exemplo:

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + x + 2.$$

210. Teorema

Quaisquer que sejam as funções

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

tem-se:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demonstração

Consideremos um elemento qualquer x de A e coloquemos $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$; temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(w) = z$$

então, temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo x de A .

EXERCÍCIOS

A.289 Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

Pede-se:

- obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$
- calcular $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$
- determinar os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de f , trocando-se x por $g(x)$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5 \\ (f \circ g)(x) &= 4x^2 - 4x - 8.\end{aligned}$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g , trocando-se x por $f(x)$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3 \\ (g \circ f)(x) &= 2x^2 + 8x - 13\end{aligned}$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

calculemos $g \circ f$ para $x = 2$

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

c) o problema em questão, resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \implies 4(x^2 - x - 6) = 0 \implies x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

A.290 Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

Pede-se:

- obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$
- calcular $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$
- determinar os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

A.291 Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.292 Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$. Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.293 Nas funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obter as leis que definem:

- $f \circ g$
- $g \circ f$
- $f \circ f$
- $g \circ g$

A.294 Considere a função em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Qual é a lei

que define $f(-x)$? E $f(\frac{1}{x})$? E $f(x - 1)$?

A.295 Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determinar o valor de a de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

A.296 Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $f \circ g = g \circ f$.

A.297 Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que se $f \circ g = g \circ f$ então $f = g$.

A.298 Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determinar os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução

$$a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}.$$

Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, isto é: $x \leq -1$ ou $x \geq 4$. Então

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

$$b) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [g(x)]^2 - 3 \cdot g(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4.$$

Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geq 0$. Então

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

A.299 Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determinar os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.300 Sejam as funções $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $g(x) = 2x + 3$

definida para todo x real. Pedem-se:

- o domínio e a lei que define $f \circ g$
- o domínio e a lei que define $g \circ f$.

A.301 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obter a lei que define $(h \circ g) \circ f$.

A.302 Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obter a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

A.303 Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determinar a lei da função g .

Solução

Se $f(x) = 3x - 5$ então trocando-se x por $g(x)$ temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$$

mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$ então

$$3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$$

ou seja

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}.$$

A.304 Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determinar a lei da função g .

A.305 Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determinar a lei da função f .

Solução

Se $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$ então $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 1$.

Como $g(x) = 3x - 2$, decorre $x = \frac{g(x) + 2}{3}$ e então:

$$f(g(x)) = g\left[\frac{g(x) + 2}{3}\right]^2 - 3 \cdot \left[\frac{g(x) + 2}{3}\right] + 1 = [g(x)]^2 + 4g(x) + 4 - g(x) - 2 + 1 = [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) + 3 \text{ logo, } f(x) = x^2 + 3x + 3.$$

A.306 Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determinar a lei da função f .

A.307 Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real e $x \neq 2$ e $(f \circ g)(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$ definida para todo x real e $x \neq 1$. Determinar a lei da função f .

A.308 Sejam f e g funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4 & \text{se } x < 1 \end{cases} \text{ e } g(x) = x - 3.$$

Obter a lei que define $f \circ g$.

Solução

Fazendo $g(x) = y$, temos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y)$. Temos de examinar dois casos:

1º) $y \geq 1$

$$y \geq 1 \iff g(x) \geq 1 \iff x - 3 \geq 1 \iff x \geq 4$$

$$y \geq 1 \implies f(y) = y^2 + 2y + 4 \implies f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) + 4 \implies (f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 2(x - 3) + 4 = x^2 - 4x + 7.$$

2º) $y < 1$

$$y < 1 \iff g(x) < 1 \iff x - 3 < 1 \iff x < 4$$

$$y < 1 \implies f(y) = 3y + 4 \implies f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 4 \implies (f \circ g)(x) = 3(x - 3) + 4 = 3x - 5$$

$$\text{Conclusão: } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 5, & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

A.309 Sejam f e g as funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases} \text{ e } g(x) = 2x + 3.$$

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.310 Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{e } g(x) = 2 - 3x.$$

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.311 Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ e } g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Obter as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

A.312 Sejam as funções reais g e $f \circ g$ definidas por $g(x) = 2x - 3$ e

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Obter a lei que define f .

II. FUNÇÃO SOBREJETORA

211. Definição

Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que

$$f(x) = y.$$

Em símbolos

$$f: A \rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} \iff \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$$

Notemos que $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(f) = B$.

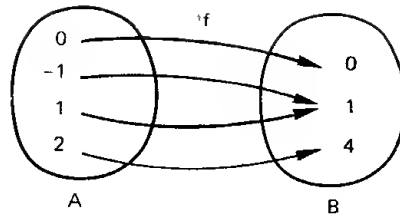
$$f: A \rightarrow B \\ f \text{ é sobrejetora} \iff \text{Im}(f) = B$$

Em lugar de dizermos " f é uma função sobrejetora de A em B " poderemos dizer " f é uma *sobrejeção* de A em B ".

212. Exemplos

1º) A função f de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora pois, para todo elemento $y \in B$, existe o elemento $x \in A$ tal que $y = x^2$.

Observemos que para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.



2º) A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora pois, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = x^2 + 1$, bastando para isso tomar $x = \sqrt{y - 1}$ ou $x = -\sqrt{y - 1}$.

III. FUNÇÃO INJETORA

213. Definição

Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em símbolos

$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \forall x_2, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Notemos que a definição proposta é equivalente a uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

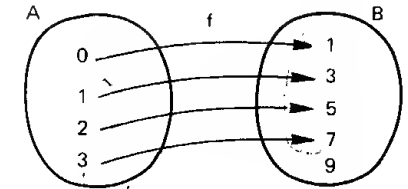
$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \forall x_2, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função injetora de A em B ” poderemos dizer “ f é uma *injeção* de A em B ”.

214. Exemplos

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei $f(x) = 2x + 1$ é injetora pois, dois elementos distintos de A têm como imagens dois elementos distintos de B . Observemos que não existem duas ou mais flechas convergindo para um mesmo elemento de B .



2º) A função de $A = \mathbb{N}$ em $B = \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetora, pois, qualquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{N} , se $x_1 \neq x_2$ então $2x_1 \neq 2x_2$.

3º) A função de $A = \mathbb{R}^*$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetora, pois, qualquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{R}^* , se $x_1 \neq x_2$ então $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

IV. FUNÇÃO BIJETORA

215. Definição

Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

Em símbolos

$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora}$$

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento y pertencente a B existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

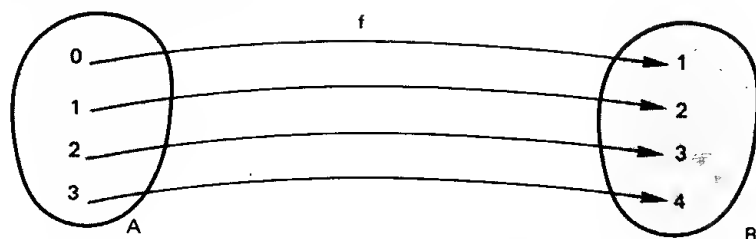
$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists! x, x \in A \mid f(x) = y$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função bijetora de A em B ” poderemos dizer “ f é uma *bijeção* de A em B ”.

216. Exemplos

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora



pois, f é sobrejetora e injetora, isto é, para todo elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$, tal que $y = x + 1$. Observemos que para cada elemento de B converge uma só flecha.

2º) A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, pois:

I) qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$, basta tomarmos $x = \frac{y - 2}{3}$. Logo, f é sobrejetora;

II) quaisquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{R} , se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2$, isto é, f é injetora.

217. Observemos que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras.

Assim, por exemplo, a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = |x|$

I) dado $y \in \mathbb{R}_-^*$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = |x|$, portanto f não é sobrejetora;

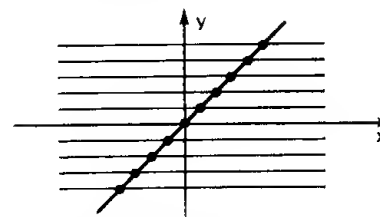
II) existem x_1 e x_2 em \mathbb{R} , x_1 e x_2 opostos (e portanto $x_1 \neq x_2$) tais que $|x_1| = |x_2|$, isto é, f não é injetora.

218. Através da representação cartesiana de uma função f podemos verificar se f é injetora ou sobrejetora ou bijetora. Para isso, basta analisarmos o número de pontos de intersecção das retas paralelas ao eixo dos x , conduzidas por cada ponto $(0, y)$ onde $y \in B$ (contra-domínio de f).

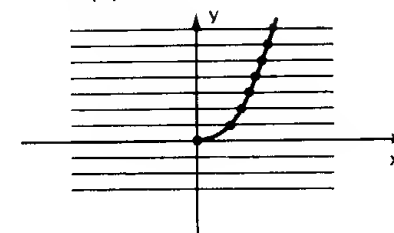
1º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é *injetora*.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$



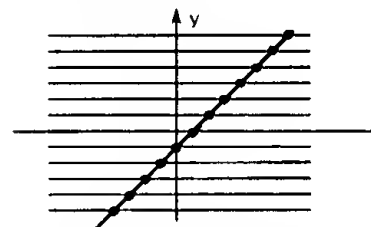
b) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$



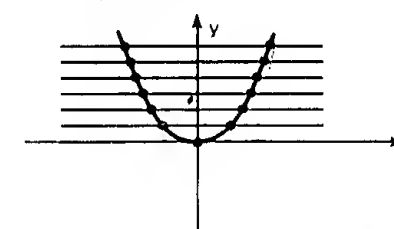
2º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos então a função é *sobrejetora*.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x - 1$



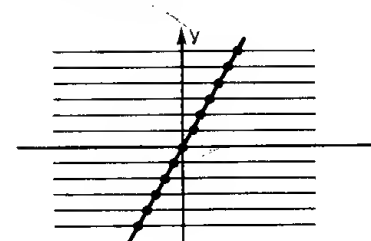
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2$



3º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é *bijetora*.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$



b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x \cdot |x|$



219. Resumo:

Dada a função f de A em B , consideram-se as retas horizontais por $(0, y)$ com $y \in B$:

1º) se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então f é *injetora*.

2º) se toda reta corta o gráfico, então f é *sobrejetora*.

3º) se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então f é *bijetora*.

220. Teorema

Se duas funções f de A em B e g de B em C são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também sobrejetora.

Demonstração

A função g é sobrejetora então, para todo z de C , existe y em B tal que $g(y) = z$ e a função f é sobrejetora, isto é, dado y em B existe x em A tal que $f(x) = y$.

Logo, para todo z em C , existe x em A tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

o que prova que $g \circ f$ é sobrejetora.

221. Teorema

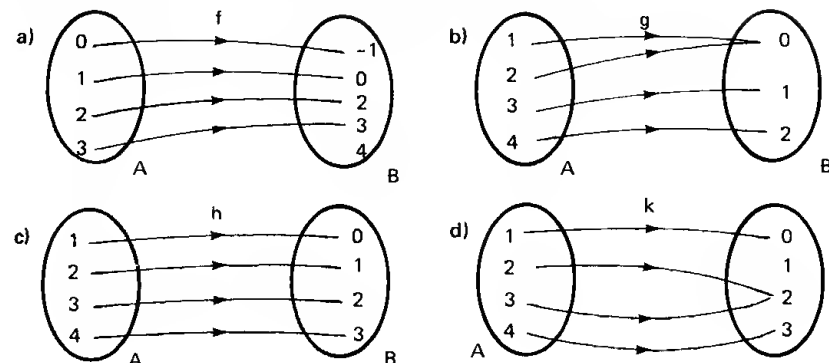
Se duas funções f de A em B e g de B em C são injetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também injetora.

Demonstração

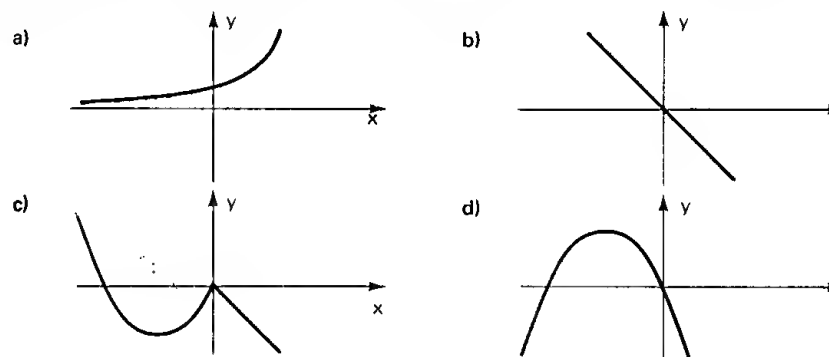
Consideremos x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A e suponhamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, isto é, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetora, da última igualdade resulta que $f(x_1) = f(x_2)$, como f é também injetora vem, $x_1 = x_2$; portanto $g \circ f$ é injetora.

EXERCÍCIOS

A.313 Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora?



A.314 Para as funções em \mathbb{R} abaixo representadas qual é injetora? E sobrejetora? E bijetora?



A.315 Nas funções seguintes classifique em

- I) injetora II) sobrejetora III) bijetora
IV) não é sobrejetora e nem injetora.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$
b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
d) $m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$
e) $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $n(x) = [x]$
f) $p: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \frac{1}{x}$
g) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$
h) $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x| \cdot (x - 1)$

A.316 Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq b\}$ de modo que a função f de \mathbb{R} em B definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

A.317 Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ de modo que a função f de A em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

A.318 Nas funções seguintes classifique em

- I) injetora II) sobrejetora III) bijetora
IV) não é injetora e nem sobrejetora.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

d) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e) $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

f) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ [x] & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

A.319 Sejam as funções: f de A em B , definida por $y = f(x)$; identidade em A , anotada por I_A , de A em A e definida por $I_A(x) = x$; identidade em B , anotada por I_B , de B em B e definida por $I_B(x) = x$. Prove:

$$f \circ I_A = f \quad \text{e} \quad I_B \circ f = f.$$

A.320 As funções I_A e I_B do exercício anterior são iguais? Justificar.

A.321 Os conjuntos A e B têm, respectivamente m e n elementos. Considera-se uma função $f: A \rightarrow B$. Qual a condição sobre m e n para que f possa ser injetora? E para f ser sobrejetora? E bijetora?

A.322 Quantas são as injeções de $A = \{a, b\}$ em $B = \{c, d, e, f\}$?

A.323 Quantas são as sobrejeções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{d, e\}$?

A.324 Mostrar com um exemplo que a composta de uma injeção com uma sobrejeção pode não ser nem injetora nem sobrejetora.

V. FUNÇÃO INVERSA

222. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que a função f é bijetora formada pelos pares ordenados

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$

onde $D(f) = A$ e $\text{Im}(f) = B$.

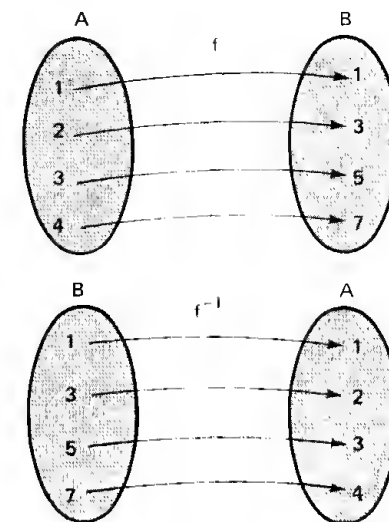
A relação $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$, inversa de f , é também uma função pois, f é uma bijeção de A em B , isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

A função f^{-1} é formada pelos pares ordenados

$$f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

onde

$$D(f^{-1}) = B \quad \text{e} \quad \text{Im}(f^{-1}) = A.$$



Observemos que a função f é definida pela sentença $y = 2x - 1$, e f^{-1} é

definida pela sentença $x = \frac{y+1}{2}$, isto é

1º) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$

2º) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \frac{y+1}{2}$

223. Teorema

Seja $f: A \rightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração

1ª Parte: se f^{-1} é uma função de B em A então f é bijetora.

a) para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$, ou ainda, $(x, y) \in f$. Assim f é sobrejetora.

b) dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$ resultará $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é absurdo pois y só tem uma imagem em f^{-1} . Assim $f(x_1) \neq f(x_2)$ e f é injetora.

2ª Parte: se f é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A .

a) Como f é sobrejetora, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto, $(y, x) \in f^{-1}$.

b) Se $y \in B$ duas imagens x_1 e x_2 em f^{-1} , vem:

$$(y, x_1) \in f^{-1} \text{ e } (y, x_2) \in f^{-1}$$

portanto

$$(x_1, y) \in f \text{ e } (x_2, y) \in f.$$

Como f é injetora resulta $x_1 = x_2$.

224. Definição

Se f é uma função bijetora de A em B , a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos *função inversa de f* e indicamos por f^{-1} .

225. Observações

1ª) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f , permutando-se os elementos de cada par, isto é

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

2ª) Pela observação anterior, temos

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1} , teremos:

$$(y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

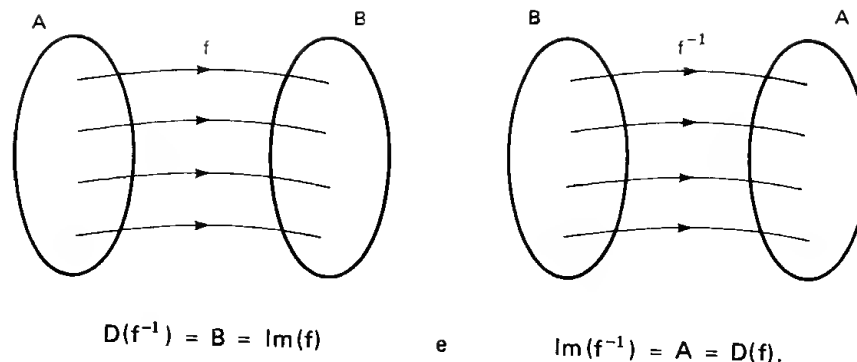
isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função f

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Podemos assim afirmar que f e f^{-1} são inversas entre si, ou melhor, uma é inversa da outra.

3ª) O domínio da função f^{-1} é B , que é a imagem da função f .

A imagem da função f^{-1} é A , que é o domínio da função f .



226. Vimos no exemplo anterior que se a função f é definida pela sentença aberta $y = 2x - 1$, então a função inversa f^{-1} é definida pela sentença $x = \frac{y+1}{2}$.

Observemos, por exemplo, que $x = 2$ e $y = 3$ satisfazem a condição $y = 2x - 1$ e também $x = \frac{y+1}{2}$. Isto não quer dizer que o par ordenado $(2, 3)$ pertença a f e a f^{-1} . De fato

$$(2, 3) \in f \text{ e } (3, 2) \in f^{-1}.$$

As sentenças abertas $y = 2x - 1$ e $x = \frac{y+1}{2}$ não especificam quem $(x?)$ ou $y?)$ é o primeiro termo do par ordenado.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função f , colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

e ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1} , como o conjunto

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y+1}{2}\}$$

devemos ter y em abscissa e x em ordenada.

Afim de que possamos convencionar que:

1º) dada uma sentença aberta que define uma função, x representa sempre o primeiro termo dos pares ordenados e

2º) dois gráficos de funções distintas podem ser construídos no mesmo plano cartesiano com x em abscissas e y em ordenadas. Justifica-se a seguinte regra prática.

227. Regra prática

Dada a função bijetora f de A em B , definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1} , procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x , obtendo $x = f(y)$.

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplos

1º) Qual é a função inversa da função f bijetora em \mathbb{R} definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é: $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressando y em função de x :

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3}$$

Resposta: É a função f^{-1} em \mathbb{R} definida por $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$.

2º) Qual é a função inversa da função f bijetora em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática, temos: $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

Resposta: É a função f^{-1} em \mathbb{R} definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

228. Propriedade

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Observemos inicialmente que se $(a, b) \in f$ então $(b, a) \in f^{-1}$.

Para provarmos que os pontos $P(a, b)$ e $Q(b, a)$ são simétricos em relação a reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3), devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular a reta r e que as distâncias dos pontos P e Q a reta r são iguais.

O ponto M , médio do segmento PQ tem coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ e portanto M pertence a reta r . Como M é médio do segmento PQ , isto é, $\overline{MP} = \overline{MQ}$, $M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r .

Para provarmos que a reta \overleftrightarrow{PQ} é perpendicular a reta r , consideremos o ponto $R(c, c)$ da reta r , distinto de M e provemos que o triângulo PMR é retângulo em M .

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR encontramos:

$$\overline{PM}^2 = (a - \frac{a+b}{2})^2 + (b - \frac{a+b}{2})^2 = (\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2 = 2(\frac{a-b}{2})^2$$

$$\overline{MR}^2 = (\frac{a+b}{2} - c)^2 + (\frac{a+b}{2} - c)^2 = 2(\frac{a+b}{2} - c)^2$$

$$\overline{PR}^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2$$

e observemos que

$$\begin{aligned} \overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 &= 2(\frac{a-b}{2})^2 + 2(\frac{a+b}{2} - c)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - \\ &- 2(a+b) \cdot c + 2c^2 = a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - \\ &- 2bc + c^2) = (a - c)^2 + (b - c)^2 = \overline{PR}^2. \end{aligned}$$

229. Assim, por exemplo, vamos construir no mesmo diagrama os gráficos de duas funções inversas entre si:

$$1^\circ) f(x) = 2x - 4 \quad e \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{2}$$

$$2^\circ) f(x) = x^2 \quad e \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

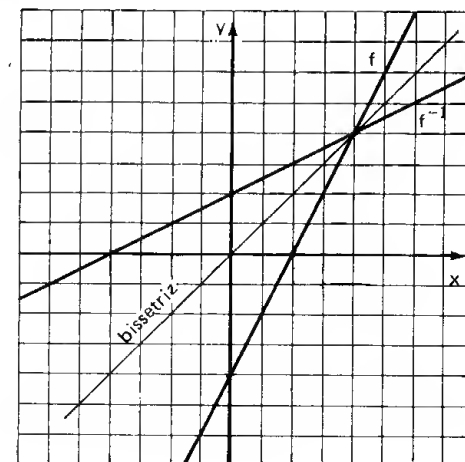
$$3^\circ) f(x) = x^3 \quad e \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$1^\circ) y = 2x - 4$$

$$y = \frac{x + 4}{2}$$

x	y
-4	-12
-3	-10
-2	-8
-1	-6
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4

x	y
-12	-4
-10	-3
-8	-2
-6	-1
-4	0
-2	1
0	2
2	3
4	4

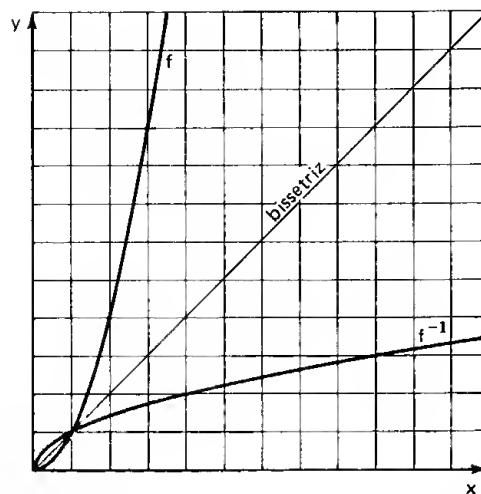


$$2^o) y = x^2$$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

$$y = \sqrt{x}$$

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6

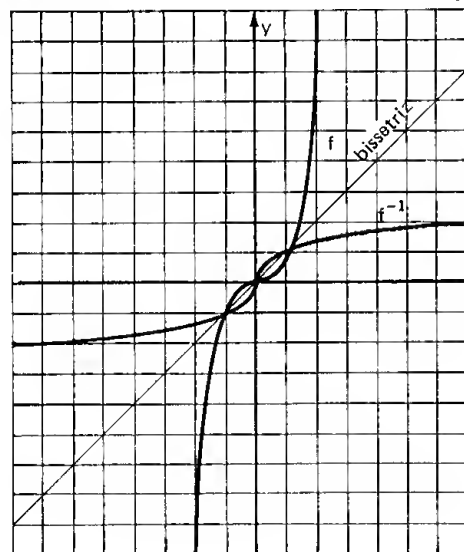


$$3^o) y = x^3$$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

$$y = \sqrt[3]{x}$$

x	y
-27	-3
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3



230. Teorema

Seja f uma função bijetora de A em B . Se f^{-1} é a função inversa de f então

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

Demonstração

$$\forall x \in A, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

$$\forall y \in B, (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

231. Teorema

Se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras então

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demonstração

Observemos inicialmente: se as funções f de A em B e g de B em C , são bijetoras, então a função composta, $g \circ f$ de A em C é bijetora, logo, existe a função inversa $(g \circ f)^{-1}$ de C em A .

Queremos provar que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, então basta provar que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A \quad \text{e} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_C.$$

Notemos que

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B, \quad g^{-1} \circ g = I_B \quad \text{e} \quad g \circ g^{-1} = I_C.$$

Então:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = [(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g] \circ f = [f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)] \circ f = [f^{-1} \circ I_B] \circ f = f^{-1} \circ f = I_A$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = [(g \circ f) \circ f^{-1}] \circ g^{-1} = [g \circ (f \circ f^{-1})] \circ g^{-1} = [g \circ I_B] \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_C.$$

EXERCÍCIOS

A.325 Para cada função abaixo pede-se provar que é bijetora e determinar sua inversa:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 5$

b) $g: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $g(x) = \frac{x+1}{x-4}$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^5$

A.326 Nas funções abaixo de \mathbb{R} em \mathbb{R} , obter a lei de correspondência que define a função inversa.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \frac{4x-1}{3}$

c) $h(x) = x^3 + 2$

d) $p(x) = (x-1)^3 + 2$

e) $q(x) = \sqrt[3]{x+2}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{x-1}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

A.327 A função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^2$, admite função inversa? Justificar.

A.328 Seja a função f de \mathbb{R}_- em \mathbb{R}_+ , definida por $f(x) = x^2$. Qual é a função inversa de f ?

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2$ com $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:

$$x = y^2 \text{ com } y \leq 0 \text{ e } x \geq 0$$

II) expressando y em função de x

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \text{ ou } y = -\sqrt{x}$$

Considerando que na função inversa f^{-1} , devemos ter $y \leq 0$ e $x \geq 0$ a lei de correspondência da função inversa será $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} de \mathbb{R}_+ em \mathbb{R}_- definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

A.329 Obter a função inversa nas seguintes funções abaixo

a) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(x) = x^2$$

b) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

$$f(x) = (x - 1)^2$$

c) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_-$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

$$f(x) = -(x - 2)^2$$

d) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_-$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

$$f(x) = -(x + 1)^2$$

e) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow B$, onde $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

$$f(x) = x^2 + 1$$

f) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow B$, onde $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

$$f(x) = 4 - x^2$$

g) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow B$, onde $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

$$f(x) = x^2 - 1$$

A.330 Seja a função bijetora f , de $\mathbb{R} - \{2\}$ em $\mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Qual é a função inversa de f ?

Solução

A função dada é $f(x) = y = \frac{x+1}{x-2}$ com $x \neq 2$ e $y \neq 1$.

Aplicando a regra prática, temos:

$$x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow xy - y = 2x + 1 \Rightarrow y(x - 1) = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Resp.: É a função f^{-1} , de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R} - \{2\}$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

A.331 Obter a função inversa das seguintes funções:

a) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$$

c) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{4-x}{x-3}$$

d) $f: \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$

$$f(x) = \frac{5x+2}{3x-1}$$

e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$

$$f(x) = \frac{4x+2}{x}$$

f) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-3}$$

A.332 Seja a função f de $\mathbb{R} - \{-2\}$ em $\mathbb{R} - \{4\}$ definida por $f(x) = \frac{4x-3}{x+2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 5?

Solução

Queremos determinar $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f^{-1}(a) = 5$, para isto, basta determinar a tal que $f(5) = a$

$$a = f(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7} \Rightarrow a = \frac{17}{7}$$

A.333 Seja a função f de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?

A.334 Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$ e a função f de A em B definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obter a função inversa de f .

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$ com $x \geq 1$ e $y \geq 2$.

Aplicando a regra prática temos:

I) permutando as variáveis:

$$x = y^2 - 2y + 3 \text{ com } y \geq 1 \text{ e } x \geq 2$$

II) expressando y em função de x

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 2y + 3 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 3 - 1 \Rightarrow x = (y - 1)^2 + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y - 1)^2 &= \sqrt{x - 2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x - 2} \text{ ou } y - 1 = -\sqrt{x - 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= 1 + \sqrt{x - 2} \text{ ou } y = 1 - \sqrt{x - 2}. \end{aligned}$$

Considerando que na função inversa f^{-1} , devemos ter $y \geq 1$ e $x \geq 2$, a sentença que define a função inversa é $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

Resposta: $f^{-1}: B \rightarrow A$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$$

A.335 Obter a função inversa das seguintes funções:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 2x$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{4}\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 9\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = -x^2 + 4x + 5$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$

g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{4}\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{8}\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

A.336 Seja a função bijetora de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Determinar f^{-1} .

Solução

Notemos que

1º) se $x \geq 0$ então $f(x) = y = x^2 - 1$, logo $y \geq -1$.

2º) se $x < 0$ então $f(x) = y = x - 1$, logo $y < -1$.

A função proposta é

$y = x^2 - 1$ com $x \geq 0$ e $y \geq -1$ ou $y = x - 1$ com $x < 0$ e $y < -1$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis, temos:

$x = y^2 - 1$ com $y \geq 0$ e $x \geq -1$ ou $x = y - 1$ com $y < 0$ e $x < -1$

II) expressando y em função de x , temos:

$y = \sqrt{x+1}$ com $y \geq 0$ e $x \geq -1$ ou $y = x+1$ com $y < 0$ e $x < -1$.

Logo, a função inversa f^{-1} é de \mathbb{R} em \mathbb{R} e definida por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq -1 \\ x+1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

A.337 Nas seguintes funções em \mathbb{R} , determinar a função inversa.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 - 3x & \text{se } x \geq -1 \\ 4 - 4x & \text{se } x < -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x < -1 \\ 4x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{se } x \geq 3 \\ (3-x)^3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

A.338 A função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = |x+2| + |x-1|$, admite função inversa?

A.339 Seja a função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x + |x+1| - |2x-4|$. Determinar a função inversa de f .

A.340 Seja a função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x - 3$. Construir num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .

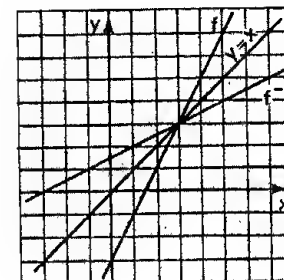
Solução

$f(x) = 2x - 3$

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

x	y
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3
4	5

x	y
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2
3	3
5	4



A.341 Nas funções que seguem, construir num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x + 1$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \frac{2x+4}{3}$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 1 - x^3$

d) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$
 $f(x) = 1 - x^2$

e) $f: A \rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
 $f(x) = x^2 + 2x$

f) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$
 $f(x) = \frac{1}{x}$

g) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$
 $f(x) = \frac{x-1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

A.342 Dadas as funções f e g em \mathbb{R} definidas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$ determinar a função inversa de $g \circ f$.

Solução

1º Processo

Determinamos inicialmente $g \circ f$ e em seguida $(g \circ f)^{-1}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 5 = 2(3x - 2) + 5 = 6x + 1.$$

Aplicando a regra prática, temos:

$$x = 6y + 1 \Rightarrow y = \frac{x - 1}{6}$$

$$\text{portanto } (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{6}$$

2º Processo

Determinamos inicialmente f^{-1} e g^{-1} e em seguida $f^{-1} \circ g^{-1}$ pois

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Aplicando a regra prática em $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$ temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3} \quad \text{e} \quad g^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x) + 2}{3} = \frac{\frac{x - 5}{2} + 2}{3} = \frac{x - 1}{6}$$

$$\text{portanto } (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{6}$$

Resposte: $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{6}$$

A.343 Dadas as funções f e g , determinar a função inversa de $g \circ f$:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 4x + 1$ e $g(x) = 3x - 5$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2x + 3$

c) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
 $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - x$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{9}{4}\}$
 $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2 - 3x$ e $g(x) = 4x + 9$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow C$
 $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x + 4}$

A.344 Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e as funções f de A em B definida por $f(x) = x^2 + 4x$ e g de B em C definida por $g(x) = x^2 - 1$. Pergunta-se: existe $(g \circ f)^{-1}$? Justificar a resposta.

A.345 Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e as funções: f de A em \mathbb{R}_- definida por $f(x) = 2x - 1$, g de \mathbb{R}_- em \mathbb{R}_+ definida por $g(x) = x^2$ e h de \mathbb{R}_+ em B definida por $h(x) = 4x - 1$. Determinar a função inversa de $h \circ (g \circ f)$.

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Equação irracional é uma equação em que há incógnita sob um ou mais radicais.

Exemplos

$$\sqrt{x-2} = 3, \quad \sqrt[3]{2x+1} = 2, \quad \sqrt{3x+2} = x+2, \quad \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-4} = 5.$$

Para resolvermos uma equação irracional, devemos transformá-la, eliminando os radicais, bastando para tanto elevá-la a potências convenientes. Não devemos esquecer que este procedimento pode introduzir raízes estranhas à equação proposta inicialmente.

232. Equação $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Façamos o estudo da equação irracional do tipo $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$f(x) = [g(x)]^2.$$

As duas equações podem ser escritas

$$\sqrt{f(x)} - g(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) - [g(x)]^2 = 0$$

ou

$$\sqrt{f(x)} - g(x) = 0 \quad (1) \quad \text{e} \quad (\sqrt{f(x)} - g(x)) \cdot (\sqrt{f(x)} + g(x)) = 0 \quad (2).$$

É claro que toda raiz da equação (1) é raiz da equação (2) porque anulando-se $\sqrt{f(x)} - g(x)$ anular-se-á o produto $(\sqrt{f(x)} - g(x))(\sqrt{f(x)} + g(x))$.

Entretanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, uma raiz da equação (2) pode não ser raiz da equação (1). De fato, uma raiz de (2) anula um dos fatores, podendo anular $\sqrt{f(x)} + g(x)$ sem anular $\sqrt{f(x)} - g(x)$.

Para verificarmos se α , raiz da equação (2), também é raiz da equação (1) podemos proceder de dois modos:

1º) verificando na equação proposta, isto é, substituindo x por α em (1) e notando se aparece uma igualdade verdadeira;

2º) verificando se $g(\alpha) \geq 0$.

Mostremos que $g(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \alpha$ é raiz de (1)

$$f(\alpha) = (g(\alpha))^2 \Rightarrow [\sqrt{f(\alpha)} - g(\alpha)][\sqrt{f(\alpha)} + g(\alpha)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} \\ \text{ou} \\ g(\alpha) = -\sqrt{f(\alpha)} \end{cases}$$

Como $g(\alpha) \geq 0$ resulta que só $g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)}$ é verdadeira, isto é, α é raiz da equação $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Esquemáticamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^2 \quad \text{e} \quad g(x) \geq 0$$

EXERCÍCIOS

A.346 Resolver as equações

a) $\sqrt{2x-3} = 5$

b) $\sqrt{x^2+5x+1} + 1 = 2x$

Solução

a) Não há possibilidade de introduzir raízes estranhas ao quadrarmos esta equação, pois

$$g(x) = 5 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2x-3} = 5 \Rightarrow 2x-3 = 5^2 \Rightarrow x = 14$$

$$S = \{14\}$$

b) Antes de quadrarmos esta equação é conveniente isolarmos a raiz em um dos membros. Assim, temos:

$$\sqrt{x^2+5x+1} + 1 = 2x \Rightarrow \sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+5x+1 = (2x-1)^2 \Rightarrow x^2+5x+1 = 4x^2-4x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-9x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$x = 0 \quad \text{não é solução pois, } \sqrt{0^2+5 \cdot 0+1} + 1 \neq 2 \cdot 0$$

$$x = 3 \quad \text{é solução pois, } \sqrt{3^2+5 \cdot 3+1} + 1 = 2 \cdot 3$$

Para verificar se $x = 0$ ou $x = 3$ são ou não soluções da equação proposta podemos utilizar o segundo processo, como segue:

$$g(x) = 2x - 1$$

$$g(0) = -1 < 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{não é solução}$$

$$g(3) = 5 > 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{é solução.}$$

A.347 Resolver as equações irracionais:

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{3x - 2} = 4$ | b) $\sqrt{1 - 2x} = 3$ |
| c) $\sqrt{x^2 - 5x + 13} = 3$ | d) $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 2$ |
| e) $\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 2$ | f) $\sqrt{16 + \sqrt{x + 4}} = 5$ |
| g) $\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}} = 3$ | h) $\sqrt{5x + 10} = 17 - 4x$ |
| i) $x + \sqrt{25 - x^2} = 7$ | j) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$ |
| k) $2 - x - 2\sqrt{x + 1} = 0$ | l) $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$ |
| m) $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 2 = 3x$ | n) $\sqrt{x^4 + 2x^2 - x + 1} = 1 - x^2$ |
| o) $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$ | p) $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ |

A.348 (MAPOFEI-74) Resolver a equação $\sqrt{4x + 5} - x = 0$.

A.349 (MAPOFEI-75) Verificar se existem números reais x tais que $2 - x = \sqrt{x^2 - 1}$. Justificar a resposta.

A.350 Resolver as equações:

- a) $x^3 - 3\sqrt{x^3} + 2 = 0$ b) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} - 1 = 0$

Soluções

a) Fazendo $\sqrt{x^3} = y$ e $x^3 = y^2$, temos:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 2$$

mas $y = \sqrt{x^3}$, logo

$$\sqrt{x^3} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\sqrt{x^3} = 2 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$$S = \{1, \sqrt[3]{4}\}$$

b) Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$ e $\sqrt{x} = y^2$, temos

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ ou } y = -1$$

Agora calculamos x :

$$y = -1 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

$$S = \{\frac{1}{16}\}$$

A.351 Resolver as equações:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ | b) $9x + 12\sqrt{x} - 5 = 0$ |
| c) $6x + 7\sqrt{x} + 2 = 0$ | d) $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ |
| e) $x^3 - 6\sqrt{x^3} + 5 = 0$ | f) $x^3 + 7\sqrt{x^3} - 8 = 0$ |
| g) $\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} + 2 = 0$ | h) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 6 = 0$ |
| i) $3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - 1 = 0$ | j) $9\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0$ |

A.352 Resolver a equação

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 3x = x^2 + 4$$

Solução

A equação proposta é equivalente a

$$x^2 + 3x + 4 - \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 - \sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2 = 0$$

Fazendo $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = y$, temos

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -1$$

$y = -1$, não convém, pois, $y = \sqrt{x^2 + 3x + 6} \geq 0$

Para $y = 2$, temos:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = -1$$

$$S = \{-2, -1\}.$$

A.353 Resolver as equações:

- a) $3x^2 + 5x + 4 = 2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}$
 b) $x^2 + \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 4x + 7$
 c) $x^2 - x + 3 = 5\sqrt{x^2 - x - 3}$
 d) $x^2 + 4\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 2x + 3$

A.354 Resolver em \mathbb{R}_+ a equação

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$$

A.355 Resolver a equação

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 4} = 5$$

Solução

Antes de elevarmos ao quadrado, devemos transpor uma das raízes para o outro membro. Assim, temos:

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 4} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x + 1} = 5 - \sqrt{2x - 4}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x + 1})^2 = (5 - \sqrt{2x - 4})^2 \Rightarrow 2x + 1 = 25 - 10\sqrt{2x - 4} + 2x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{2x - 4} = 20 \Rightarrow \sqrt{2x - 4} = 2 \Rightarrow 2x - 4 = 2^2 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$ é solução pois

$$\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + \sqrt{2 \cdot 4 - 4} = 5$$

$$S = \{4\}$$

A.356 Resolver as equações:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$ | b) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = 1$ |
| c) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} = 1$ | d) $\sqrt{x - 9} - \sqrt{x - 18} = 1$ |
| e) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 14} = 1$ | f) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 24} = 14$ |

A.357 Resolver as equações:

- a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$ b) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$
 c) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{x-2} = 3$ d) $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-1} = 2$
 e) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x+8}$ f) $\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 1$
 g) $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$

A.358 Resolver as equações:

- a) $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x-23}$
 b) $\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}$
 c) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4x+9} - \sqrt{x}$
 d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$
 e) $\sqrt{4x-3a} - \sqrt{x+6a} = \sqrt{x-3a}$

A.359 Resolver a equação:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10}$$

Solução

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} &= \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7})^2 &= (\sqrt{x+5} + \sqrt{x-10})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x-2 + x-7 + 2\sqrt{x^2-9x+14} &= x+5 + x-10 + 2\sqrt{x^2-5x-50} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{x^2-9x+14} &= 4 + 2\sqrt{x^2-5x-50} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{x^2-9x+14} &= 2 + \sqrt{x^2-5x-50} \Rightarrow \\ \Rightarrow 60 - 4x &= 4\sqrt{x^2-5x-50} \Rightarrow 15 - x = \sqrt{x^2-5x-50} \Rightarrow \\ \Rightarrow 225 - 30x + x^2 &= x^2 - 5x - 50 \Rightarrow -25x = -275 \Rightarrow x = 11 \\ x = 11 &\text{ é solução pois} \\ \sqrt{11-2} + \sqrt{11-7} &= \sqrt{11+5} + \sqrt{11-10} \\ S &= \{11\} \end{aligned}$$

A.360 Resolver as equações:

- a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$
 b) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-10} = \sqrt{x+17} + \sqrt{x-15}$
 c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+7}$
 d) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}$

A.361 Resolver as equações:

- a) $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{4}{\sqrt{x+2}}$
 c) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \frac{12}{\sqrt{5+x}}$ d) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

A.362 Resolver a equação:

$$\frac{2}{x + \sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2-x^2}} = x$$

Solução

Multiplicando os termos da primeira fração por $x - \sqrt{2-x^2}$ e os da segunda por $x + \sqrt{2-x^2}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{2(x - \sqrt{2-x^2})}{2x^2 - 2} + \frac{2(x + \sqrt{2-x^2})}{2x^2 - 2} &= x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x - \sqrt{2-x^2}}{x^2 - 1} + \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{x^2 - 1} &= x \Rightarrow 2x = x(x^2 - 1) \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ não são soluções pois devemos ter $2 - x^2 \geq 0$ para que seja real a expressão $\sqrt{2-x^2}$. Somente $x = 0$ é solução e isto pode ser verificado facilmente, substituindo x por zero na equação proposta.

$$S = \{0\}.$$

A.363 Resolver as equações:

- a) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2(x^2+1)}$
 b) $\frac{1}{1 - \sqrt{1-x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$
 c) $\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3}} = \sqrt{x}$

A.364 (MAPOFEI-76) Resolver a equação

$$\frac{1}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}} + \frac{1}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} = 2$$

A.365 Resolver a equação

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

A.366 Resolver a equação

$$\frac{1+x - \sqrt{2x+x^2}}{1+x + \sqrt{2x+x^2}} = \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{x}}$$

A.367 Sendo a e b números reais, resolver a equação:

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$$

A.368 Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, resolver a equação:

$$2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

A.369 Sendo a e b números reais não negativos, resolver e discutir a equação:

$$\sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$$

A.370 Sabendo que a e b são números reais e positivos, resolver as equações:

$$a) \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$$

$$b) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{b} + \sqrt{x-a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$c) \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}$$

A.371 Sendo a e b números reais não nulos, resolver a equação:

$$\sqrt{a^2 + x}\sqrt{b^2 + x^2 - a^2} = x - a$$

A.372 Resolver os sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} xy = 36 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = 20 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$$

A.373 Resolver os sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+4y} = 4 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x+2y} - \sqrt{2x+2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

233. Equação $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

Façamos agora o estudo da equação do tipo $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$.

Vamos mostrar que ao elevarmos esta equação ao cubo não introduzimos raízes estranhas, isto é, obtemos uma equação equivalente.

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = [g(x)]^3.$$

De fato, considerando estas duas equações, temos:

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \text{ e } f(x) = [g(x)]^3$$

ou

$$\sqrt[3]{f(x)} - g(x) = 0 \quad (1) \text{ e } f(x) - [g(x)]^3 = 0 \quad (2).$$

Observemos em (2) que:

$$f(x) - [g(x)]^3 = [\sqrt[3]{f(x)} - g(x)] \cdot [(\sqrt[3]{f(x)})^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + (g(x))^2] = 0.$$

Como o fator $(\sqrt[3]{f(x)})^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + (g(x))^2$ é sempre positivo pois

$$(\sqrt[3]{f(x)})^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + (g(x))^2 = [\sqrt[3]{f(x)} + \frac{g(x)}{2}]^2 + \frac{3 \cdot [g(x)]^2}{4}$$

resulta que o fator $\sqrt[3]{f(x)} - g(x)$ é nulo e a equação (2) tem sempre as mesmas soluções da equação (1), isto é, (1) e (2) são equivalentes.

EXERCÍCIOS

A.374 Resolver as equações:

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3 \quad b) \sqrt[3]{4x^2+9x+1} = x+1$$

Solução

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3 \implies 2x+1 = 3^3 \implies x = 13$$

$$S = \{13\}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt[3]{4x^2+9x+1} &= x+1 \implies 4x^2+9x+1 = (x+1)^3 \implies \\ &\implies 4x^2+9x+1 = x^3+3x^2+3x+1 \implies x^3-x^2-6x=0 \implies \\ &\implies x(x^2-x-6)=0 \implies x=0 \text{ ou } x=3 \text{ ou } x=-2 \\ S &= \{0, 3, -2\}. \end{aligned}$$

A.375 Resolver as equações:

$$a) \sqrt[3]{3x-5} = 1$$

$$c) \sqrt[3]{2x+5} = -3$$

$$e) \sqrt[3]{3x^2-7x-5} = 1$$

$$g) \sqrt[3]{x+1} = 2x+1$$

$$i) \sqrt[3]{2x^2+3x-1} = 2x-1$$

$$b) \sqrt[3]{4x+1} = 2$$

$$d) \sqrt[3]{x^2-x-4} = 2$$

$$f) \sqrt[3]{x^2-8x+40} = 3$$

$$h) \sqrt[3]{3x-1} = 2x-1$$

$$j) \sqrt[3]{8+15x-5x^2-3x^3} = x+2$$

A.376 Resolver a equação $2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2 - 20} = 0$

A.377 Resolver a equação $\sqrt[3]{x+49} - \sqrt[3]{x-49} = 2$

Solução

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+49} - \sqrt[3]{x-49} = 2 &\Rightarrow \sqrt[3]{x+49} = 2 + \sqrt[3]{x-49} \Rightarrow (\sqrt[3]{x+49})^3 = \\ &= (2 + \sqrt[3]{x-49})^3 \Rightarrow x+49 = 8 + 3\sqrt[3]{x-49} + 3(\sqrt[3]{x-49})^2 + x-49 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3(\sqrt[3]{x-49})^2 + 3\sqrt[3]{x-49} - 90 = 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{x-49})^2 + \sqrt[3]{x-49} - 15 = 0.\end{aligned}$$

Fazendo $\sqrt[3]{x-49} = y$, temos:

$$y^2 + y - 15 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -5 \text{ mas, } y = \sqrt[3]{x-49}, \text{ então}$$

$$\sqrt[3]{x-49} = 3 \Rightarrow x-49 = 3^3 \Rightarrow x = 76$$

$$\sqrt[3]{x-49} = -5 \Rightarrow x-49 = (-5)^3 \Rightarrow x = -76$$

$$S = \{76, -76\}.$$

A.378 Resolver a equação $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-6} = 1$.

A.379 Resolver a equação $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

A.380 Resolver a equação $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

A.381 Resolver a equação $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$.

Solução

Para resolvermos esta equação vamos utilizar a identidade

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B).$$

Fazendo $A = \sqrt[3]{x+1}$, $B = \sqrt[3]{x-1}$ e $A+B = \sqrt[3]{5x}$, temos:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{5x})^3 &= (\sqrt[3]{x+1})^3 + (\sqrt[3]{x-1})^3 + 3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{5x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+1 + x-1 + 3\sqrt[3]{5x^3-5x} = 5x \Rightarrow \sqrt[3]{5x^3-5x} = x \Rightarrow 5x^3-5x = x^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x^3-5x = 0 \Rightarrow x(4x^2-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$S = \{0, \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$$

A.382 Resolver a equação: $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{11x}$.

A.383 Resolver a equação: $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$.

A.384 Resolver a equação: $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{5}$.

A.385 Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x+y=72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

APÊNDICE II

INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

234. Inequação irracional é uma inequação em que há incógnita sob um ou mais radicais.

Exemplos

$$\sqrt{x+2} > 3, \sqrt{x^2-3x+4} > x, \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} > 2.$$

Observemos inicialmente que se a e b são números reais não negativos então

$$a > b \iff a^2 > b^2$$

$$a < b \iff a^2 < b^2$$

Assim, por exemplo, são *verdadeiras* as implicações

$$2 < 5 \Rightarrow 4 < 25$$

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} \Rightarrow 3 > 2$$

$$4 < 9 \Rightarrow 2 < 3$$

mas são *falsas* as implicações

$$-3 < -2 \Rightarrow 9 < 4$$

$$2 > -5 \Rightarrow 4 > 25$$

$$2 > -3 \Rightarrow 4 > 9$$

235. Teorema

Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ em um conjunto de valores x pertencentes a $A \subset \mathbb{R}$, então são equivalentes as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

Demonstração

Seja S_1 o conjunto das soluções da inequação $f(x) > g(x)$ e S_2 o conjunto das soluções da inequação $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$, isto é,

$$S_1 = \{x \in A \mid f(x) > g(x)\}$$

e

$$S_2 = \{x \in A \mid [f(x)]^2 > [g(x)]^2\}$$

Para provarmos que as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$ são equivalentes, basta provarmos que $S_1 = S_2$.

De fato, para todo α de S_1 , temos:

$$\alpha \in S_1 \subset A \Rightarrow f(\alpha) > g(\alpha) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) - g(\alpha) > 0 \\ f(\alpha) + g(\alpha) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(\alpha) - g(\alpha)] \cdot [f(\alpha) + g(\alpha)] > 0 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 - [g(\alpha)]^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(\alpha)]^2 > [g(\alpha)]^2 \Rightarrow \alpha \in S_2.$$

Acabamos de provar que $S_1 \subset S_2$, provemos agora que $S_2 \subset S_1$.

Para todo α de S_2 , temos:

$$\alpha \in S_2 \subset A \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in S_2 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 > [g(\alpha)]^2 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 - [g(\alpha)]^2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [f(\alpha) + g(\alpha)] \cdot [f(\alpha) - g(\alpha)] > 0 \\ \alpha \in A \Rightarrow f(\alpha) \geq 0 \text{ e } g(\alpha) \geq 0 \Rightarrow f(\alpha) + g(\alpha) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha) - g(\alpha) > 0 \Rightarrow f(\alpha) > g(\alpha) \Rightarrow \alpha \in S_1.$$

Vejamos agora processos para resolvermos alguns tipos de inequações irracionais.

236. Inequação Irracional $\sqrt{f(x)} < g(x)$

O processo para resolvermos esta inequação é:

1º) Estabelecemos o domínio de validade, isto é;

$$f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) > 0 \quad (I)$$

2º) Quadramos a inequação proposta e resolvemos

$$f(x) < [g(x)]^2 \quad (II)$$

As condições (I) e (II) podem ser agrupadas da seguinte forma

$$0 \leq f(x) < [g(x)]^2 \text{ e } g(x) > 0$$

Esquemáticamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff 0 \leq f(x) < [g(x)]^2 \text{ e } g(x) > 0$$

Analogamente, podemos estabelecer para a inequação $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff 0 \leq f(x) \leq [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geq 0$$

EXERCÍCIOS

A.386 Resolver as inequações irracionais

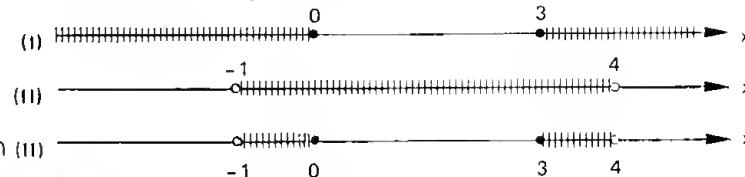
a) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$

b) $\sqrt{2x + 5} \leq x + 1$

Soluções

a) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 3x < 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$

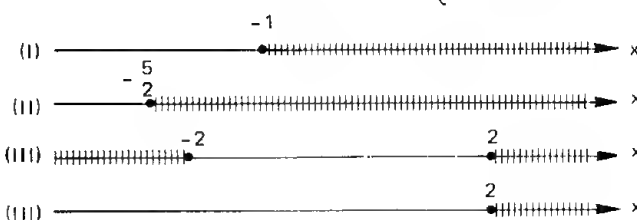
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } 3 \leq x < 4\}$$

b) $\sqrt{2x + 5} \leq x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 0 \leq 2x + 5 \leq (x + 1)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ 2x + 5 \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

A.387 Resolver as inequações:

a) $\sqrt{3x - 2} < 2$

b) $\sqrt{2x + 5} \leq 3$

c) $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2$

d) $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} \leq 2$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1$

A.388 Resolver as inequações:

- a) $\sqrt{4-3x} \leq x$ b) $\sqrt{x+5} < x-1$
 c) $\sqrt{2x+9} < x-3$ d) $\sqrt{x+3} \leq x+1$
 e) $\sqrt{x+1} < 3-x$ f) $\sqrt{2x^2-x-6} \leq x$
 g) $\sqrt{x^2-3x+3} < 2x-1$ h) $\sqrt{2x^2-5x-3} < x+3$
 i) $1 + \sqrt{x^2-3x+2} \leq 2x$

237. Inequação irracional $\sqrt{f(x)} > g(x)$

O processo para resolução desta inequação consiste em duas partes, que são

1ª Parte

$$g(x) < 0 \text{ e } f(x) \geq 0$$

pois sendo $g(x) < 0$ e $f(x) \geq 0$, a inequação $\sqrt{f(x)} > g(x)$ está satisfeita.

2ª Parte

a) Estabelecemos o domínio de validade da inequação, isto é:

$$f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0 \quad (I)$$

b) Quadramos a inequação proposta recaindo em

$$f(x) > [g(x)]^2 \quad (II)$$

As condições (I) e (II) podem ser agrupadas da seguinte forma

$$f(x) > [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geq 0$$

Esquematicamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Analogamente, para a inequação $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, temos:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

A.389 Resolver as inequações:

- a) $\sqrt{3x-5} \geq 2$ b) $\sqrt{3x^2-7x+2} > -4$ c) $\sqrt{2x-1} > x-2$

Solução

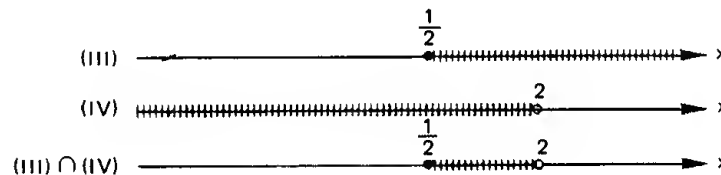
$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{3x-5} \geq 2 &\Rightarrow 3x-5 \geq 2^2 \Rightarrow x \geq 3 \\ S &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3x^2-7x+2} > -4 &\Rightarrow 3x^2-7x+2 \geq 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 2 \\ S &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 2\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sqrt{2x-1} > x-2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \text{ e } x-2 < 0 & (I) \\ \text{ou} \\ 2x-1 > (x-2)^2 \text{ e } x-2 \geq 0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo (I), temos:

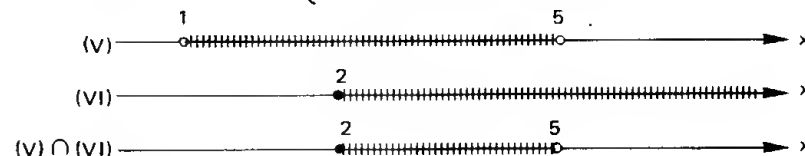
$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \text{e} \\ x-2 < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} & (III) \\ \text{e} \\ x < 2 & (IV) \end{cases} \end{aligned}$$



$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 2\}$$

Resolvendo (II), temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x-1 > (x-2)^2 \\ \text{e} \\ x-2 \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 < 0 & (V) \\ \text{e} \\ x-2 \geq 0 & (VI) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 5 & (V) \\ \text{e} \\ x \geq 2 & (VI) \end{cases} \end{aligned}$$



$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$$

A solução da inequação proposta é dada por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 5\}$$

A.390 Resolver as inequações:

- a) $\sqrt{2x+3} > 5$
 b) $\sqrt{3x+7} \geq 1$
 c) $\sqrt{4x-3} > -2$
 d) $\sqrt{4x^2-13x+7} > 2$
 e) $\sqrt{x^2-2x+7} \geq 3$
 f) $\sqrt{4-19x-5x^2} \geq -3$
 g) $\sqrt{5+5x-2x^2} \geq 3$

A.391 Resolver as inequações

- a) $\sqrt{3x-2} > x$
 b) $\sqrt{6-x} \geq x$
 c) $\sqrt{2x+3} \geq 1-x$
 d) $\sqrt{6x^2+x-1} > 2x+1$
 e) $\sqrt{x^2-6x+5} > x-2$
 f) $\sqrt{x^2+4x-4} \geq 2x-2$
 g) $\sqrt{7x-1} \geq x+2$
 h) $\sqrt{4x^2-5x+2} \geq x-2$
 i) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$
 j) $\sqrt{2+3x-2x^2} > x-2$

A.392 Resolver a inequação

$$\frac{\sqrt{3-x}}{x} \leq 2$$

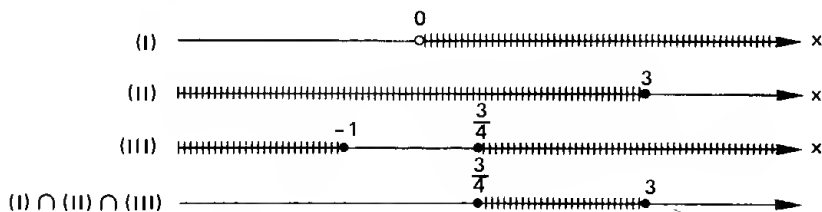
Solução

Para resolvermos esta inequação, devemos multiplicar ambos os membros por x , não esquecendo que dependendo do sinal de x , o sentido da desigualdade será mantido ou invertido.

1ª Possibilidade $x > 0$ (I)

$$\frac{\sqrt{3-x}}{x} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{3-x} \leq 2x \Rightarrow 0 \leq 3-x \leq 4x^2 \Rightarrow$$

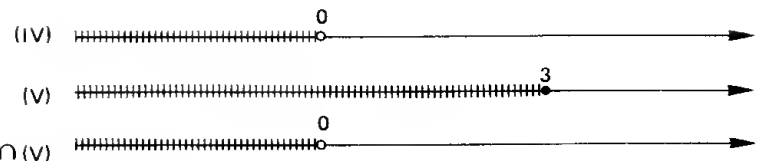
$$\Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3-x \leq 4x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 4x^2+x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{(III)}$$



$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 3\}$$

2ª Possibilidade $x < 0$ (IV)

$$\frac{\sqrt{3-x}}{x} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{3-x} \geq 2x \xrightarrow{(2x < 0)} 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \text{(V)}$$



$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

A solução da inequação proposta é dada por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } \frac{3}{4} \leq x \leq 3\}$$

A.393 Resolver as inequações

- a) $\frac{\sqrt{5x+3}}{x} < \sqrt{2}$
 b) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$
 c) $\frac{\sqrt{x+2}}{x} \geq 1$
 d) $\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{x} \geq 1$

238. Inequação Irracional $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

O processo de resolução desta inequação é

1º) Estabelecemos o domínio de validade da inequação, isto é,

$$f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0 \quad \text{(I)}$$

2º) Quadramos a inequação proposta recaindo em

$$f(x) > g(x) \quad \text{(II)}$$

As condições (I) e (II) podem ser agrupadas da seguinte forma

$$f(x) > g(x) \geq 0$$

Esquematicamente, temos:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x) \geq 0}$$

De modo análogo, para a inequação

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}, \text{ temos:}$$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x) \geq 0}$$

EXERCÍCIOS

A.394 Resolver a inequação

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Solução

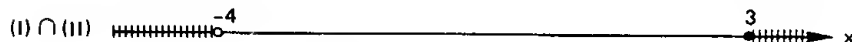
$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ ou } x > 1 & \text{(I)} \\ x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) 

(II) 

(I) ∩ (II) 

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}$$

A.395 Resolver as inequações:

a) $\sqrt{3x - 2} \geq \sqrt{2x - 3}$

c) $\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \leq \sqrt{8x + 1}$

e) $\sqrt{2x^2 - 10x + 8} > \sqrt{x^2 - 6x + 7}$

g) $\sqrt{2 - 3x - x^2} > \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

b) $\sqrt{5 - x} < \sqrt{2x + 7}$

d) $\sqrt{x^2 - 7x + 17} \geq \sqrt{8 + 2x - x^2}$

f) $\sqrt{-x^2 + 5x - 6} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} < \sqrt{2x^2 - x + 4}$

A.396 Resolver as inequações:

a) $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} - \sqrt{4 + x} < 0$

A.397 Resolver as inequações:

a) $\sqrt{1 - x} \leq \sqrt{\sqrt{5 + x}}$

b) $\sqrt[4]{x + 8} < \sqrt{x + 2}$

A.398 Resolver a inequação:

$$\sqrt{x + 1} < 2 + \sqrt{x - 4}$$

Solução

Estabelecemos inicialmente o domínio de validade da inequação

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4 \quad \text{(I)}$$

Notemos que para os valores de x satisfazendo (I), ambos os membros da inequação proposta são positivos, então podemos quadrá-la sem preocupações.

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 1} < 2 + \sqrt{x - 4} &\Rightarrow x + 1 < 4 + x - 4 + 4\sqrt{x - 4} \Rightarrow 1 < 4\sqrt{x - 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{x - 4} > \frac{1}{4} &\Rightarrow x - 4 > \frac{1}{16} \Rightarrow x > \frac{65}{16} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

A solução da inequação proposta é:

(I) 

(II) 

(I) ∩ (II) 

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{65}{16}\}$$

A.399 Resolver as inequações:

a) $\sqrt{x + 5} < 1 + \sqrt{x - 2}$

c) $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 4} < 3$

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$

A.400 Resolver a inequação:

$$\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$$

A.401 Resolver a inequação:

$$x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > \sqrt{x + 2} \sqrt{x^2 - 10x + 9}$$

RESPOSTAS

CAPÍTULO I

A.1 São proposições: a, b, c, d, e, f, g
São verdadeiras: a, d, e, g

- A.2 a) $3 \cdot 7 \neq 21$ (F) e) $(\frac{1}{2})^7 > (\frac{1}{2})^3$ (F)
b) $3(11 - 7) = 5$ (F) f) $\sqrt{2} \geq 1$ (V)
c) $3 \cdot 2 + 1 \leq 4$ (F) g) $-(-4) < 7$ (V)
d) $5 \cdot 7 - 2 > 5 \cdot 6$ (V) h) $3 \nmid 7$ (V)

- A.3 a) V b) V c) V d) F e) V
f) F g) F

- A.4 a) V b) V c) V d) V e) V
f) F g) V

- A.5 a) F b) V c) V d) V e) F
f) V g) V h) V

- A.7 a) $(\exists x)(x^2 - 5x + 4 = 0)$ b) $(\forall a)((a + 1)(a - 1) = a^2 - 1)$
c) $(\exists y)(\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7})$ d) $(\exists m)(\sqrt{m^2 + 9} \neq m + 3)$
e) $(\forall x)(-(-x) = x)$ f) $(\exists a)(5a + 4 \leq 11)$
g) $(\exists x)(\sqrt{x^2} = x)$ h) $(\exists a)(\frac{a^2 - a}{a} = a - 1)$

- A.8 a) $\text{mdc}(2, 3) \neq 1$ e $\text{mmc}(2, 3) = 6$ b) $\frac{3}{5} \neq \frac{6}{10}$ e $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$
c) $\frac{3}{7} < 1$ ou $-3 < -7$ d) $2^2 = 4$ e $\sqrt{4} \neq 2$
e) $(-3)^2 = 9$ e $\sqrt{9} = -3$ f) $2 > 5$ e $3^2 > 5^2$
g) $(\exists x)(x > 2$ e $3^x \leq 3^2$ h) $(\forall x)(\sqrt{x} \geq 0)$
i) Existe um número inteiro primo e par
j) Existe um triângulo isósceles e não equilátero
k) Todo losango é quadrado
l) Todo número tem raiz quadrada igual a zero
m) Existe um triângulo equiângulo e não equilátero.

- A.9) a) F b) F c) V d) F e) F
f) F g) F h) V i) V j) V
k) F l) F m) F

CAPÍTULO II

- A.12 a) $\{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$
 b) $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$
 c) $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}\}$
 d) $\{0\}$
 e) $\{\text{cuiabá, goiânia}\}$

- A.13 $A = \{x \mid x \text{ é divisor de } 6\}$
 $B = \{x \mid x \text{ é múltiplo inteiro e positivo de } 10\}$
 $C = \{x \mid x \text{ é quadrado de um inteiro}\}$
 $D = \{x \mid x \text{ é satélite natural da Terra}\}$

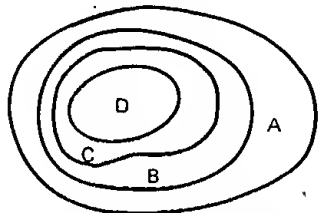
- A.14 $D = \{3\}$

- A.15 $B = \emptyset$

- A.18 todas

- A.19 a) V b) F c) F d) F e) F
 f) V g) V h) V i) V j) F

- A.20



- A.21 $(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, A\}$

- A.22 $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cup C = \{a, b, c, e\}$,

$$B \cup C = \{c, d, e\}, \quad A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$$

- A.24 a) V b) F c) F d) V e) V f) V

- A.25 círculo de centro O e raio 2r

- A.26 plano α

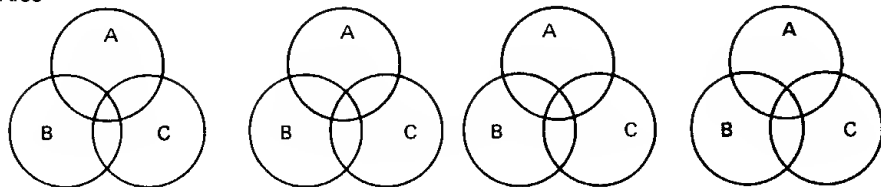
- A.27 $A \cap B = \{b, c, d\}$, $A \cap C = \{c\}$, $B \cap C = \{c\}$ e $A \cap B \cap C = \{c\}$

- A.29 a) V b) F c) F d) V e) V f) V

- A.30 a) L b) R c) Q d) Q e) Q f) P

- A.32 $X = \{a, c, e\}$

- A.33



- A.34 a) $\{a, b\}$ b) $\{e, f, g\}$ c) $\{b\}$
 d) $\{a, b\}$ e) $\{a, b, c\}$ f) $\{a, c, e, f, g\}$

- A.36 a) V b) V c) F d) V

- A.37 $X = \{1, 3, 5\}$

- A.40 a) V b) V c) F d) V

- A.41 $A = \{6, -1\}$, $B = \{e, x, r, c, i, o\}$

$$C = \{3, -3, 5\}, \quad D = \{-\frac{1}{2}\}, \quad E = \{2, 3, 4, 5\}$$

- A.42 a, b, d, f

- A.44 332 e B3

- A.45 $n_A \cup B \cup C = n_A + n_B + n_C - n_A \cap B - n_B \cap C - n_C \cap A + n_A \cap B \cap C$

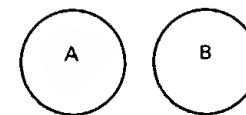
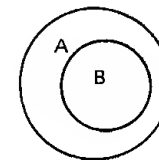
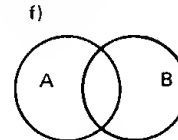
- A.46 a) 500 b) 61 c) 257 d) B4

- A.47 $A = \{p, q, r, s, t\}$, $B = \{r, s, x, z\}$, $C = \{s, t, u, v, x\}$

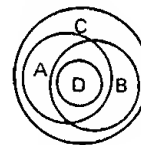
- A.48 a) 560 b) 280

- A.49 a) $\{a, b, e, f, g\}$

f)



- A.50



CAPÍTULO III

- A.51 a, c, d, g, h, i

- A.52 $D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, $D(-18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$$D(-24) \cap D(16) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

$$M(4) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots\}$$

$$M(10) = \{0, \pm 10, \pm 20, \pm 30, \dots\}$$

- A.53 12, 0, -1, 1 e 49

- A.54 a) não, pois $1 \in D(a) \cap D(b)$

b) m é um máximo divisor comum de a e b: $\text{mdc}(a, b) = \pm m$

c) a e b são primos entre si: $\text{mdc}(a, b) = \pm 1$

d) quando $a \mid b$

e) quando a e b são primos entre si

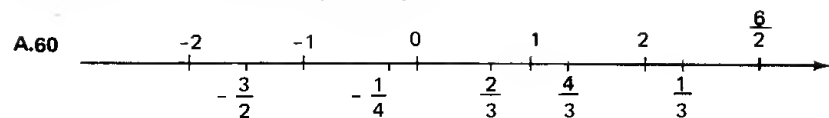
f) n é um mínimo múltiplo comum de a e b: $\text{mmc}(a, b) = \pm n$

- A.55 a) ± 1 , b) ± 2 , c) ± 3 , d) ± 6 , e) ± 12 , f) ± 42

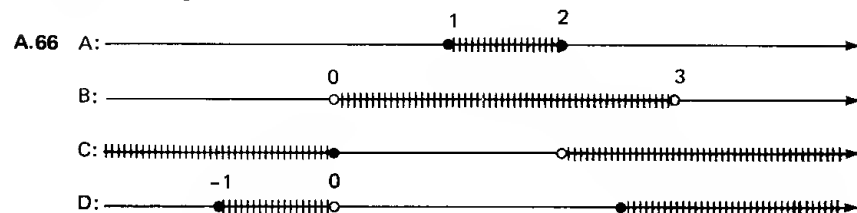
- A.56 a, b, e, f, h, k, l

- A.57 $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{B}{25}, \frac{32}{99}, \frac{271}{50}$ e $\frac{602}{111}$

A.58 $\frac{2}{3} < \frac{11}{12} < \frac{15}{16} < \frac{18}{19} < \frac{47}{48} < 1$



A.61 a, b, c, f, g, h, i



A.67 $[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
 $[0, 2[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
 $] -3, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
 $] -\infty, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
 $[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

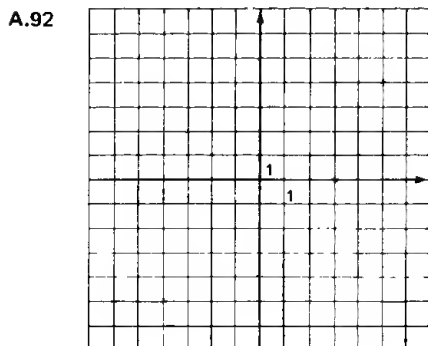
A.69 a) $[1, 2]$ b) $]1, 2]$ c) $]0, \frac{2}{5}[$ d) $[0, 2]$ e) $[-1, 2[$ f) $[1, 2]$

A.70 a) $[-1, 4]$ b) $[-1, 5]$ c) $] -2, 5[$ d) $] -\frac{3}{2}, 0[$

A.71 $\bigcap_A^B [0, 1] \cup]3, 5[$

CAPÍTULO IV

A.91 A(4, 2), B(-4, 6), C(-5, -3), D(4, -5), E(0, 4), F(-3, 0), G(0, -6), H(5, 0), I(0, 0)



A.93 a) $A \times B = \{(1, -2), (1, 1), (3, -2), (3, 1), (4, -2), (4, 1)\}$

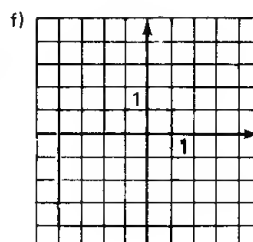
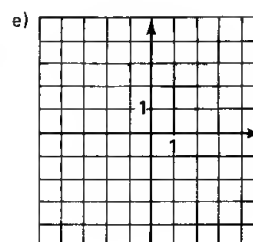
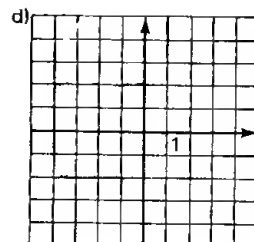
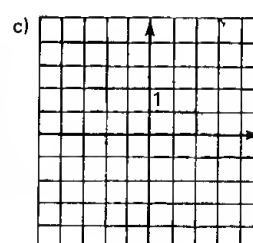
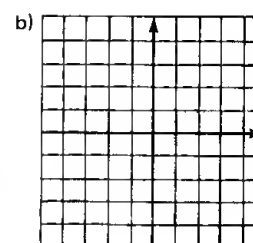
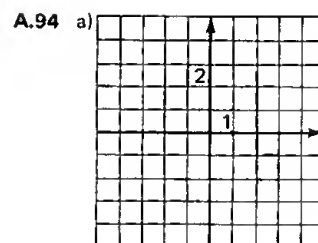
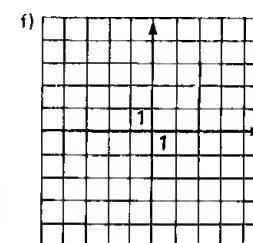
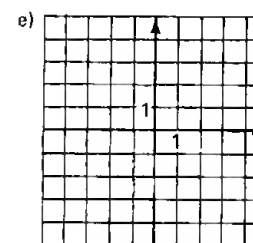
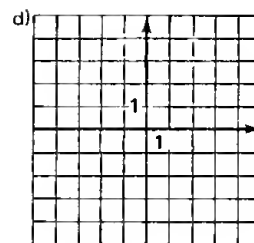
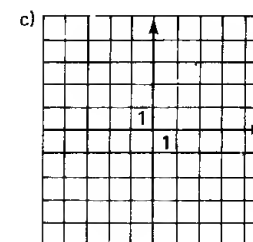
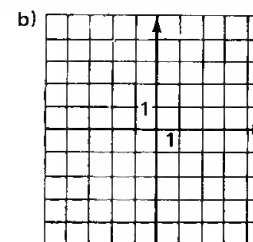
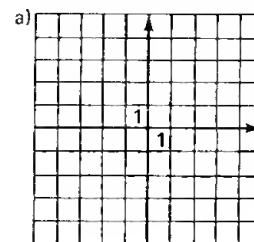
b) $B \times A = \{(-2, 1), (-2, 3), (-2, 4), (1, 1), (1, 3), (1, 4)\}$

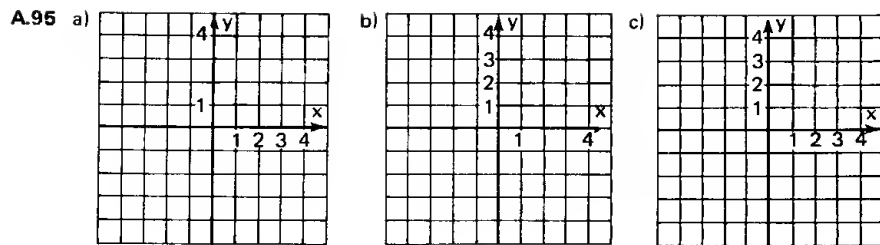
c) $A \times C = \{(1, -1), (1, 0), (1, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2), (4, -1), (4, 0), (4, 2)\}$

d) $C \times A = \{(-1, 1), (-1, 3), (-1, 4), (0, 1), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$

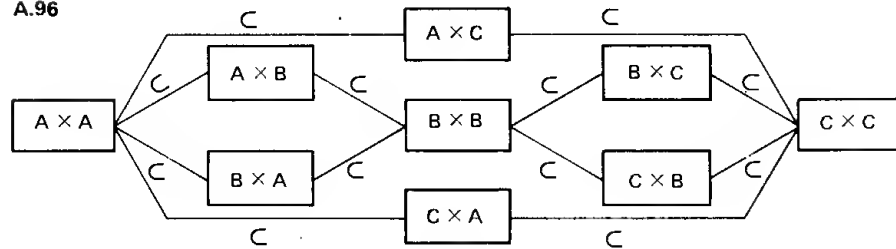
e) $B^2 = \{(-2, -2), (-2, 1), (1, -2), (1, 1)\}$

f) $C^2 = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$





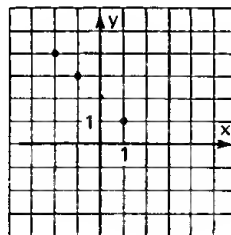
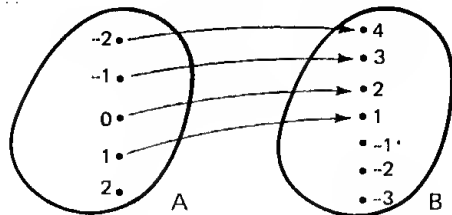
A.96



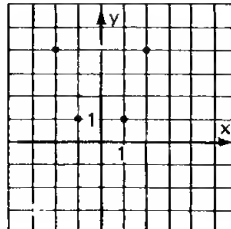
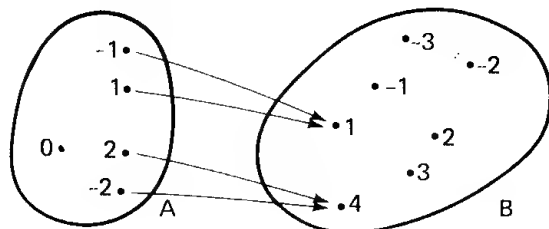
A.98 $A^2 = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 3), (0, -2), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

A.99 $A \times B = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (-1, 5), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (0, 5), (2, -1), (2, 0), (2, 2), (2, 5)\}$

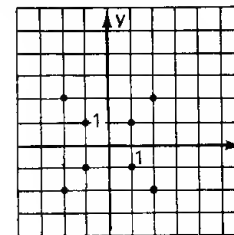
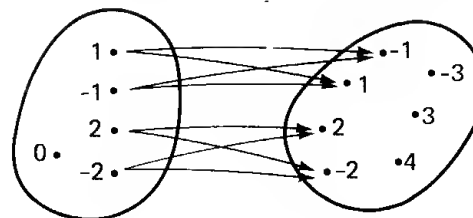
A.100 a) $R = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1)\}$



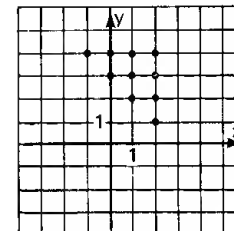
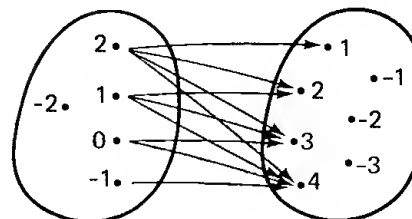
b) $S = \{(-2, 4), (2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$



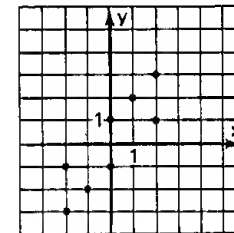
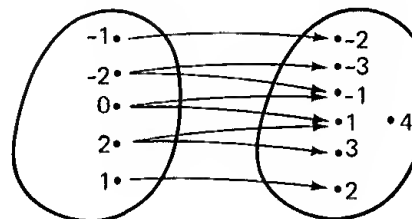
c) $T = \{(-2, -2), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -2), (2, 2)\}$



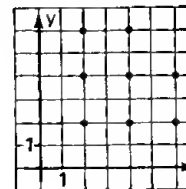
d) $V = \{(-1, 4), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$



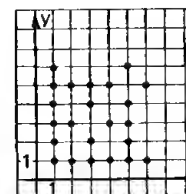
e) $W = \{(-2, -3), (-2, -1), (-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$



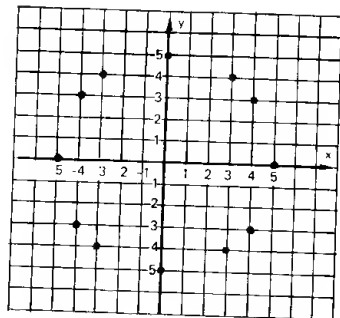
A.101 $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$



A.102



A.103



A.104 a) $D = \{1, 2\}$ e $\text{Im} = \{1, 3, 4\}$

b) $D = \{-2, -1, 3, 2\}$ e $\text{Im} = \{-7, 4, 1\}$

c) $D = \{2, 1, 5\}$ e $\text{Im} = \{1, -3, \sqrt{2}\}$

d) $D = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}\}$ e $\text{Im} = \{\sqrt{2}, 1\}$

e) $D = \{3, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$ e $\text{Im} = \{\frac{1}{2}, -1, 0\}$

A.105 a) $D(R) = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $\text{Im}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $D(S) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Im}(S) = \{1, 4\}$

c) $D(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Im}(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$

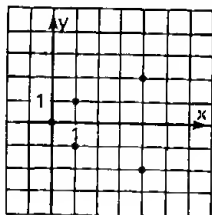
d) $D(V) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(V) = \{1, 2, 3, 4\}$

e) $D(W) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(W) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

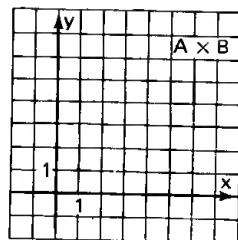
A.106 a) $R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$

b) $D(R) = \{0, 1, 4\}$ e $\text{Im}(R) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

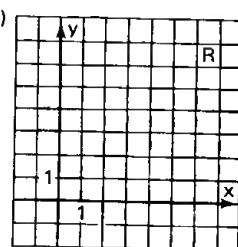
c)



A.107 a)

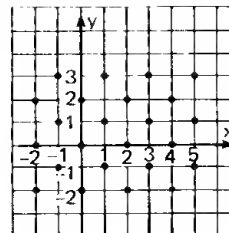


b)

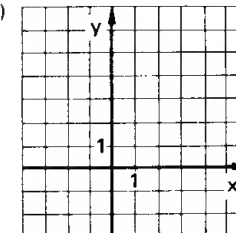


c) $D(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ e $\text{Im}(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$

A.108 a)



b)



c) $R \cap S = \emptyset$

A.109 a) $R^{-1} = \{(2, 1), (1, 3), (3, 2)\}$

b) $R^{-1} = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, -2)\}$

c) $R^{-1} = \{(-2, -3), (3, 1), (-3, -2), (1, 3)\}$

A.110 a) $R = R^{-1} = \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)\}$

b) $R = \{(0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)\}$

$R^{-1} = \{(5, 0), (4, 2), (3, 4), (2, 6), (1, 8), (0, 10)\}$

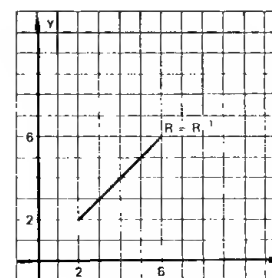
c) $R = \{(0, 10), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 5), (6, 10)\}$

$R^{-1} = \{(10, 0), (5, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 5), (10, 6)\}$

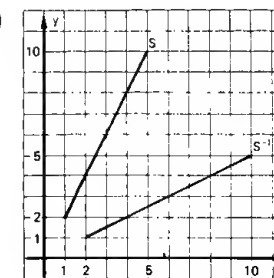
d) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$

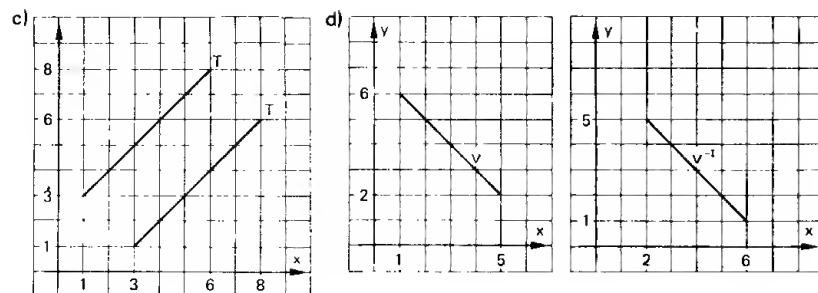
$R^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3)\}$

A.111 a)



b)





CAPÍTULO V

- A.112 a) não define função de A em B , pois o elemento $2 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B .
 b) não define função de A em B , pois o elemento $1 \in A$ está associado a dois elementos de B .
 c e d) define função de A em B , pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B .

A.113 somente (d) pois o conjunto de partida é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

A.114 a) é função.

b) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $x > 0$, encontra o gráfico da relação em dois pontos.

c) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $-1 < x < 1$, não encontra o gráfico da relação.

d) é função e) é função

f) não é função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(3, 0)$ encontra o gráfico da relação em mais que dois pontos e as retas verticais conduzidas pelos pontos $(x, 0)$, com $x \neq 3$, não encontram o gráfico da relação.

- A.115 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x$ $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x^2 - 1$

d) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2$

- A.116 a) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ c) $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x + 1$ $x \mapsto 2^x$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

- A.117 a) $f(2) = 2$ b) $f(-1) = 8$ c) $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$
 d) $f(-\frac{1}{3}) = \frac{46}{9}$ e) $f(\sqrt{3}) = 7 - 3\sqrt{3}$ f) $f(1 - \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$

- A.118 a) $f(2) = 4$ b) $f(-3) = -11$
 c) $f(0) = -2$ f) $f(\frac{3}{2})$ não tem significado pois $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

- A.119 a) $f(3) = 1$ b) $f(-\frac{3}{7}) = 1$
 c) $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ d) $f(\sqrt{4}) = 1$
 e) $f(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$ f) $f(0,75) = 1$

A.121 $x = -4$

A.122 $x = 2$ ou $x = 3$

- A.123 a) $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$
 b) $D(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(g) = \{1, 2\}$
 c) $D(h) = \{-1, 0, 1\}$ e $\text{Im}(h) = \{-2\}$
 d) $D(k) = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(k) = \{-2, -1, 0, 2\}$

- A.124 a) $\text{Im} = \{-2, 0, 2\}$ b) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
 c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 \text{ ou } y \geq 2\}$ d) $\text{Im} = \mathbb{R}$
 e) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ ou } y > 4\}$
 f) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

- A.125 a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $\text{Im} = \{1, 2, 3, 4\}$
 b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 2\}$
 c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 5\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y < 3\}$
 e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ e $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 5\}$
 f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 3\}$ e $\text{Im} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

- A.126 a) $D(f) = \mathbb{R}$
 b) $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$
 c) $D(h) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
 d) $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
 e) $D(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
 f) $D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ e } x \neq 2\}$
 g) $D(s) = \mathbb{R}$
 h) $D(t) = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$
 i) $D(n) = \mathbb{R} - \{3\}^2$

A.127 Todas são iguais, pois são todas funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} e associam cada número real ao seu cubo.

A.128 Não são iguais, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} \neq x$.

A.129 Somente serão iguais se forem funções de A em \mathbb{R} onde A é qualquer subconjunto de $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.

A.130 São iguais, pois $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$ para $-1 < x \leq 0$ ou $x > 1$.

A.131 Não são iguais, pois não têm o mesmo domínio.

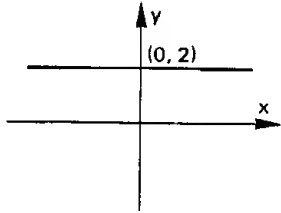
- A.132 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -10\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{3}{4}\}$

- A.134 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
 e) $S = \emptyset$
 f) $S = \mathbb{R}$

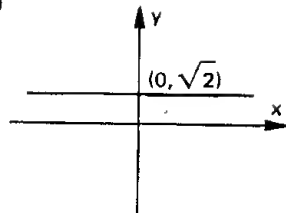
- A.136 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{3}\}$

CAPÍTULO VI

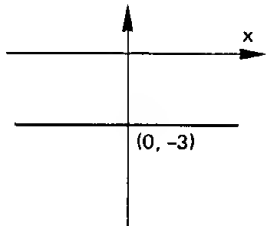
A.137 a)



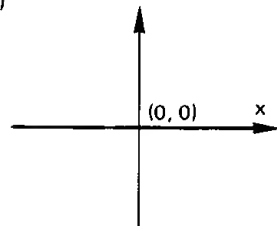
b)



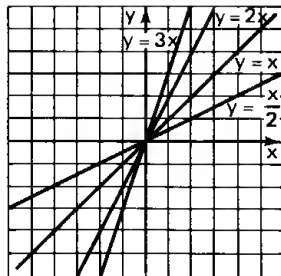
c)



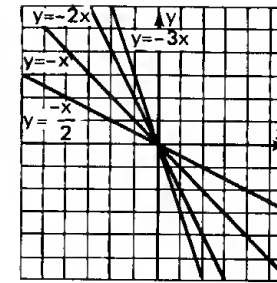
d)



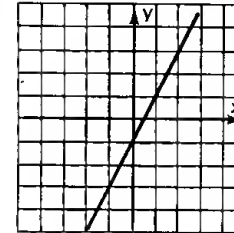
A.138



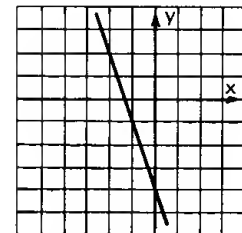
A.139



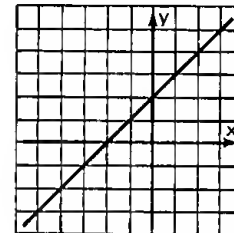
A.140 a)



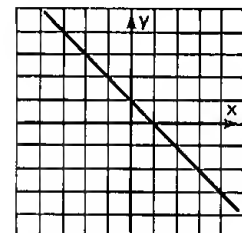
e)



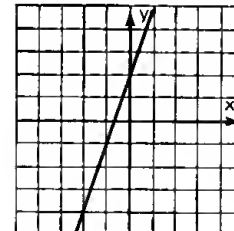
b)



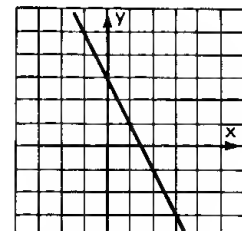
f)



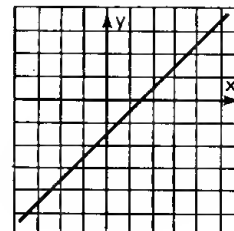
c)



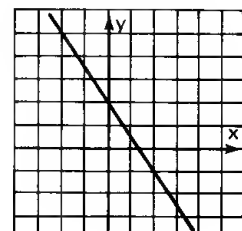
g)



d)



h)



A.142 a) $S = \{(3, 2)\}$

c) $S = \{(2, -1)\}$

e) $S = \emptyset$

A.143 a) $S = \{(3, -1)\}$

A.145 a) $y = 2x - 1$

c) $y = x - 5$

A.147 $y = -3x - 2$

A.148 $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

A.149 $y = \frac{3}{2}x + 4$

A.150 $y = -\frac{x}{3} - 3$

A.151 a) $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

c) $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$

b) $S = \{(-2, 4)\}$

d) $S = \{(3, -2)\}$

f) $S = \{(0, 0)\}$

b) $S = \{(2, 1)\}$

b) $y = \frac{1 - 3x}{2}$

d) $y = 2$

b) $y = -\frac{x}{2} + 4$

d) $y = 2x + 3$

A.152 a) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x \geq 1$

decrecente para $x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1$

b) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 1$

decrecente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $0 \leq x \leq 1$

c) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0$ ou $x > 0$

A.154 a) crescente

b) decrescente

c) crescente

d) decrescente

e) decrescente

f) crescente

A.156 a) crescente para $m > -2$

decrecente para $m < -2$

constante para $m = -2$

b) crescente para $m < 4$

decrecente para $m > 4$

constante para $m = 4$

c) crescente para $m < -3$

decrecente para $m > -3$

constante para $m = -3$

d) crescente para $m > 1$

decrecente para $m < 1$

constante para $m = 1$

A.157 a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = 6$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -5$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 6$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < -3$ ou $2 < x < 6$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = 3$

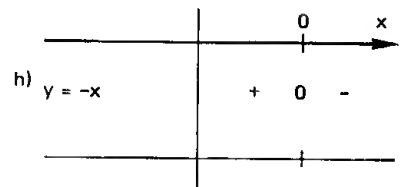
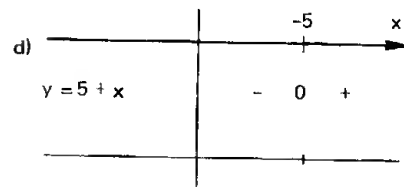
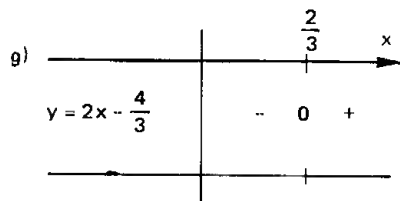
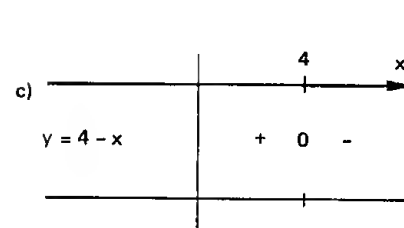
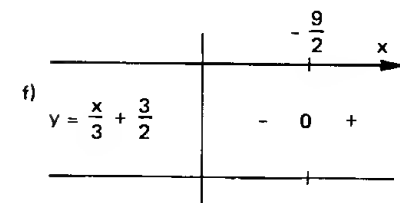
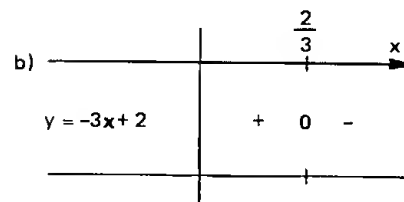
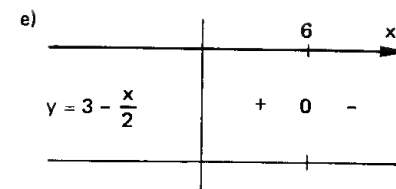
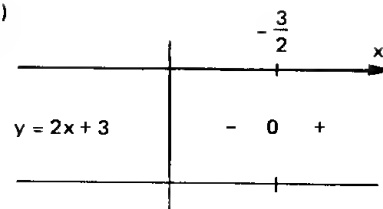
$g(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$ ou $x > -1$ e $x \neq 3$

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

A.158 a)



A.160 $x < 3$

A.161 $x > \frac{4}{3}$

A.162 a) $x \geq -\frac{1}{5}$;

b) $x > \frac{1}{2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$.

A.163 a) $x > 2$

b) $x \geq 0$

c) $\nexists x \in \mathbb{R}$

d) $x < -2$

e) $x \leq 3$

A.164 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 4\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < 1\}$ d) $S = \emptyset$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\}$ f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

A.165 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$

c) $S = \emptyset$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

A.166 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 1\}$

c) $S = \emptyset$

A.167 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{5}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{4} \text{ ou } -\frac{2}{5} < x < 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 6\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{2} \text{ ou } x \geq \frac{1}{6}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{5}{2}\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{5} \text{ ou } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{3} \text{ ou } x \geq \frac{7}{2}\}$

A.168 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{8}{3}\}$

c) $S = \emptyset$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{7}\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{5}\}$

g) $S = \{-\frac{4}{3}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{8}{3}\}$

A.170 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{7}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{5}{4}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{5} \text{ ou } x = -3\}$

A.171 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{2}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leq \frac{3}{4}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\}$

A.172 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{8} \text{ ou } x > \frac{4}{3}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > -\frac{4}{3}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

A.173 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } -\frac{3}{5} < x < -\frac{1}{3}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{4}{5} \text{ ou } -\frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

A.174 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4 \text{ ou } x > 11\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{29}{24} \leq x < -\frac{2}{3}\}$

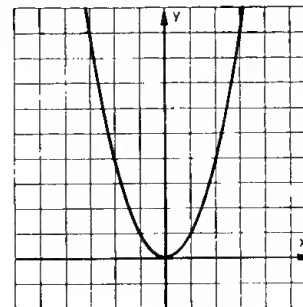
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{4} < x < -\frac{9}{42} \text{ ou } x > \frac{1}{4}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

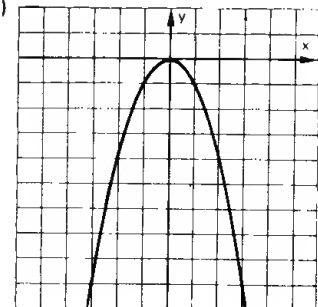
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

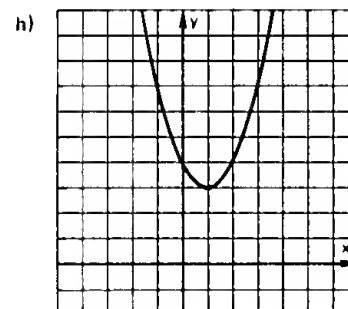
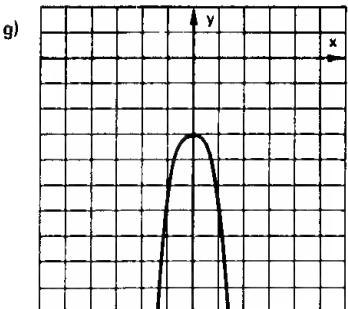
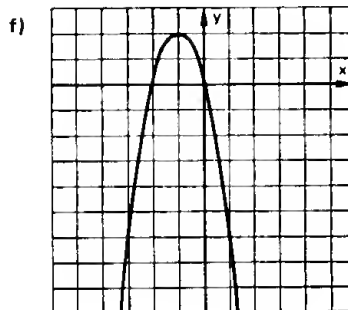
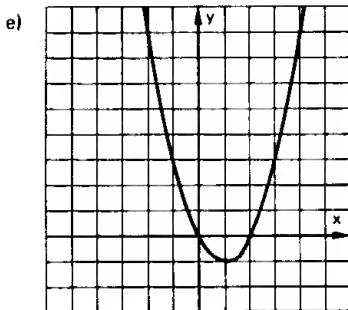
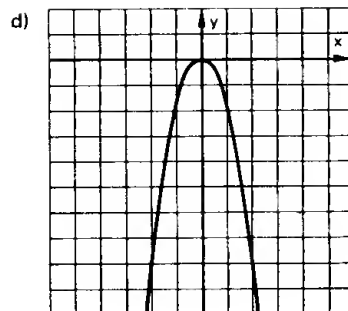
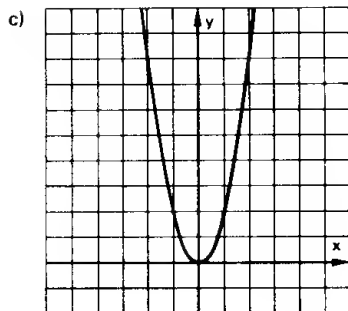
CAPÍTULO VII

A.175 a)



b)





A.176 $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

A.177 a) $x = 1$ ou $x = 2$

b) $x = 3$ ou $x = 4$

c) $x = 2$ ou $x = \frac{1}{3}$

d) não existe $x \in \mathbb{R}$

e) $x = -2$

f) $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$

g) $x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$

h) não existe $x \in \mathbb{R}$

i) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$

k) $x = 0$ ou $x = 2$

l) $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

m) não existe $x \in \mathbb{R}$

n) $x = 0$

A.178 $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$

A.180 a) $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

b) $x = 3$ ou $x = -3$

c) $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

d) $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

e) não existe $x \in \mathbb{R}$

f) não existe $x \in \mathbb{R}$

g) $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

h) $x = 2$ ou $x = -1$

A.182 $m > -\frac{9}{16}$ e $m \neq 1$

A.183 $m \leq \frac{17}{16}$ e $m \neq -2$

A.184 $m = -1$ ou $m = \frac{1}{3}$

A.185 $m = -2$ ou $m = \frac{2}{5}$

A.186 $m < -\frac{13}{12}$

A.187 $m < -\frac{1}{4}$

A.189 a) $\frac{5}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$ c) -5

d) $\frac{29}{4}$ e) $-\frac{29}{2}$ f) $\frac{155}{8}$

A.191 a) $x^2 + x - 6 = 0$

c) $x^2 - 5,4x + 2 = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$

b) $4x^2 + 4x - 3 = 0$

d) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

A.192 a) $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$

b) $cx^2 + bx + a = 0$

c) $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

d) $a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$

A.193 $m = -2 + \sqrt{6}$ ou $m = -2 - \sqrt{6}$

A.194 a) $x_m = -\frac{5}{4}$ e $y_m = -\frac{25}{8}$

b) $x_M = 2$ e $y_M = 12$

c) $x_m = 1$ e $y_m = 0$

d) $x_m = \frac{7}{4}$ e $y_m = -\frac{9}{16}$

e) $x_M = \frac{5}{2}$ e $y_M = -\frac{3}{4}$

f) $x_M = \frac{4}{3}$ e $y_M = \frac{7}{18}$

A.195 $m = 2$

A.196 $m = -2$ ou $m = 1$

A.197 $m = -1$

A.198 não existe $m \in \mathbb{R}$

A.200 $x = 2$ e $z = 4$

A.201 quadrado de lado 5 cm

A.202 3 e 3

A.203 Retângulo de lados $\frac{5}{8}$ e $\frac{5}{2}$

A.204 Retângulo de lados 4 cm e 3 cm

A.205 Retângulo de lados 2 cm e $\sqrt{3}$ cm

A.206 Retângulo de lados 2 cm e 3 cm

A.207 a) $V(0, -4)$, b) $V(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

c) $V(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8})$

d) $V(\frac{1}{4}, \frac{25}{16})$ e) $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{36})$

f) $V(\frac{7}{6}, -\frac{121}{36})$

A.208 a) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4}\}$

b) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

c) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{3}{4}\}$

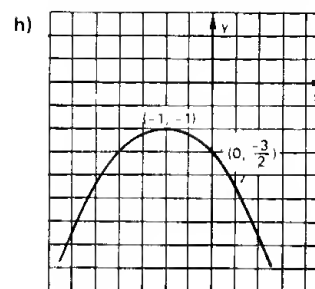
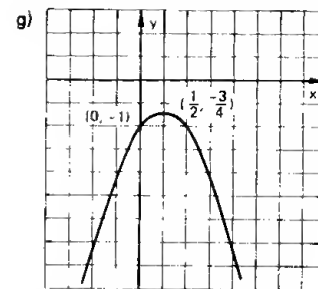
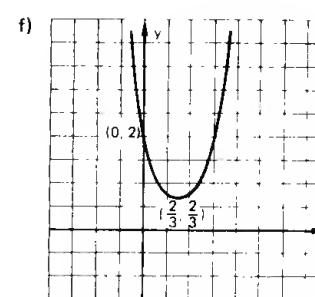
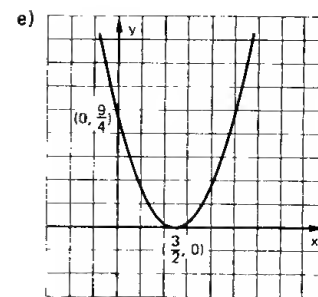
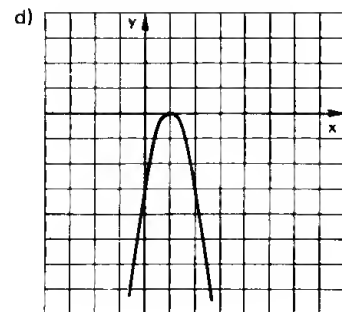
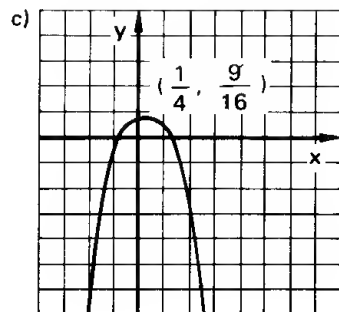
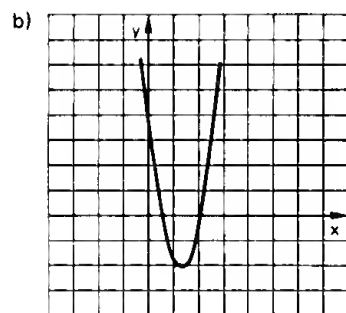
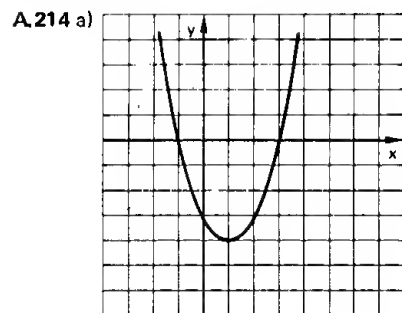
d) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 16\}$

e) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{25}{16}\}$

f) $I_m = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{2}\}$

A.209 $m = \frac{10}{3}$

A.210 $m = \sqrt{10}$ ou $m = -\sqrt{10}$



A.215 a) $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

b) $4x^2 - 10x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$
 $4x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$

$4x^2 - 10x + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

c) $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$
 $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$
 $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$

d) $-3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 $-3x^2 + 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

e) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

f) $3x^2 - 4x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

g) $-x^2 + x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

h) $-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A.219 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq \frac{1}{3}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x \leq 4\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

f) $S = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \{\frac{3}{2}\}$

i) $S = \mathbb{R}$

j) $S = \mathbb{R}$

k) $S = \emptyset$

l) $S = \emptyset$

A.221 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } 2 \leq x \leq \frac{5}{2}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

A.222 a) $P_1(5, 0)$ e $P_2(-\frac{1}{2}, 0)$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 5\}$

A.224 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{4} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq \frac{2}{3}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x \geq 0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{2}{3}\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2 \text{ ou } 3 \leq x < 5\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{3}\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -\frac{3}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{5}{2}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

A.225 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 6\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$ f) $S = \emptyset$

A.226 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < -3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\}$

d) $S = \{\frac{1}{2}\}$

A.228 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $S = \emptyset$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$

f) $S = \mathbb{R}$

A.229 a) $m > \frac{9}{4}$

b) $m \leq \frac{1}{4}$

c) $0 < m < 4$

d) $\nexists m \in \mathbb{R}$

e) $\nexists m \in \mathbb{R}$

f) $1 < m < \frac{4}{3}$

g) $m \leq -2$

h) $m \geq 3$

i) $m < -2$

j) $m \geq 1$

A.231 a) $-2 < m < 2$

b) $m < 1$

c) $m < -\frac{3}{4}$

d) $-1 < m < 2$

A.233 a) $0 < m < \frac{7}{9}$

b) $m > 1$

c) $-2 < m < 0$

d) $-3 < m < 1$ e $m \neq -1$

A.234 $m < -1$

A.235 $-2 < m < 2$

A.237 $m < \frac{3}{2}$ ou $3 < m < \frac{7}{2}$

A.238 $m < \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

A.239 $m < -5$

A.240 $-5 < m < -1$

A.241 $1 < m < 4$

A.242 $-\frac{3}{2} < m < -1$

A.243 $0 < m < \frac{1}{2}$

A.244 $m < \frac{3}{2}$ e $m \neq 0$ ou $m > 3$

A.245 $m > 1$

A.246 $-\sqrt{2} < m < -1$

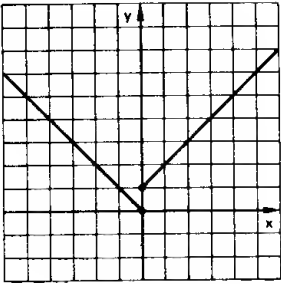
A.247 $-1 < m < 2$

A.248 $m > 1$

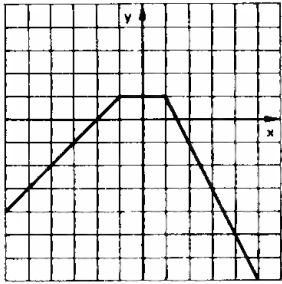
A.249 $m < -2$ ou $2 < m < 3$

A.250 $-\frac{1}{4} \leq m < 0$ ou $m > 2$

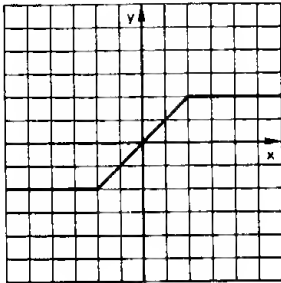
A.251 a)



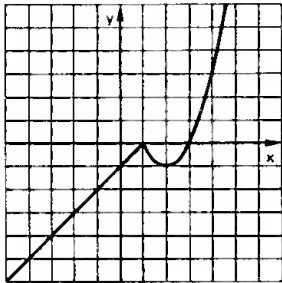
b)



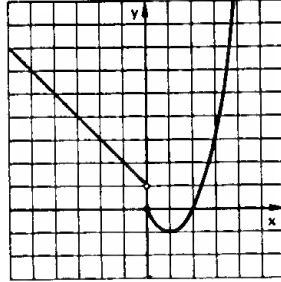
c)



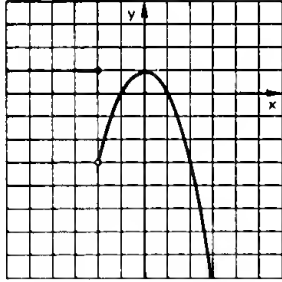
d)



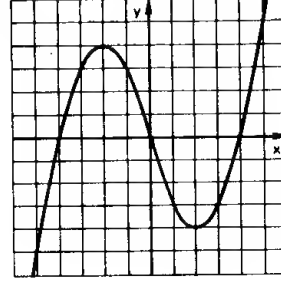
e)



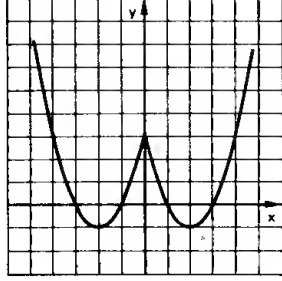
f)



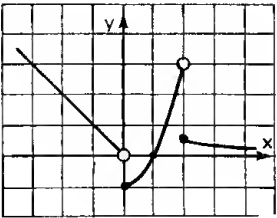
g)



h)

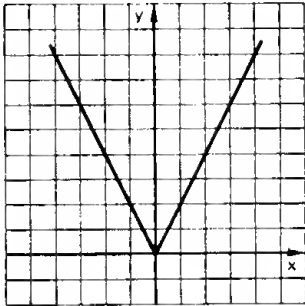


A.252

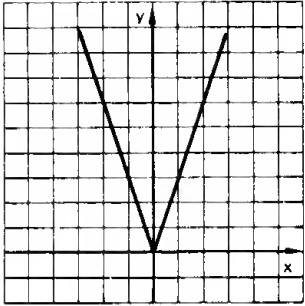


A.254 $x = 4$

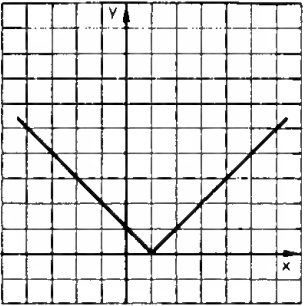
A.255 a)



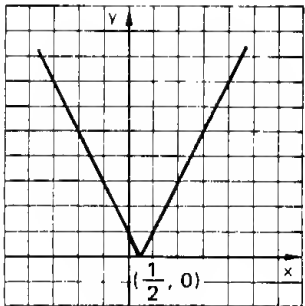
b)



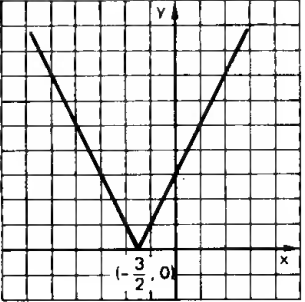
A.257 a)



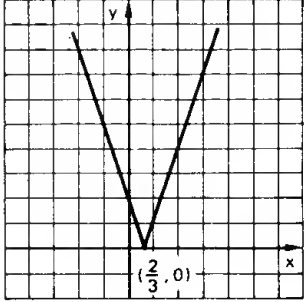
b)

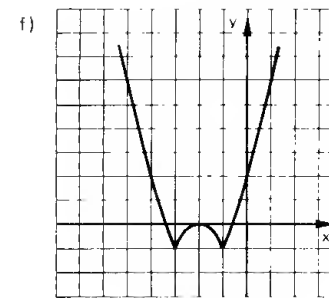
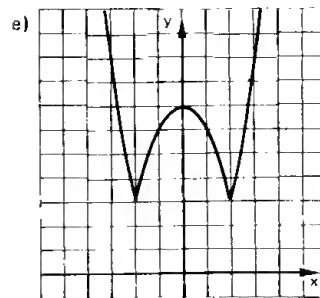
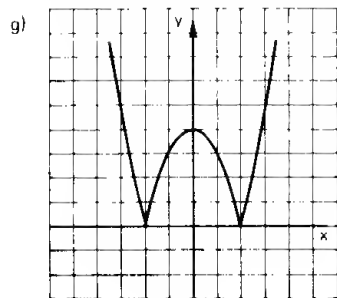
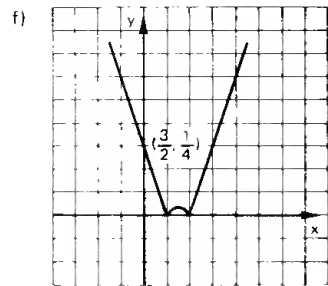
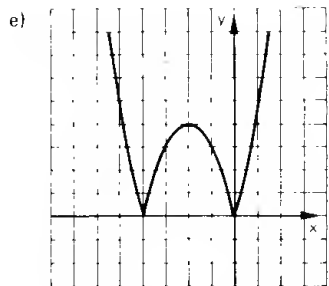


c)

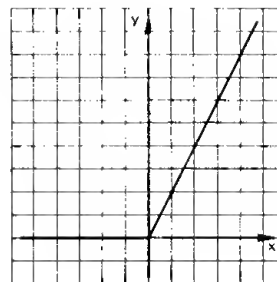


d)

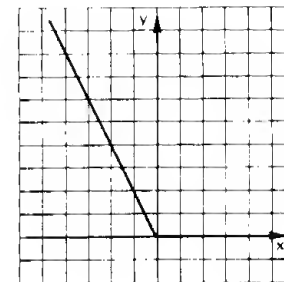




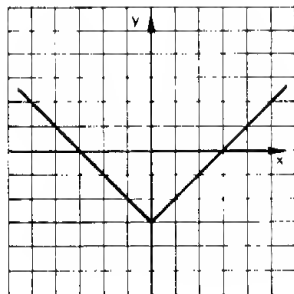
A.261 a)



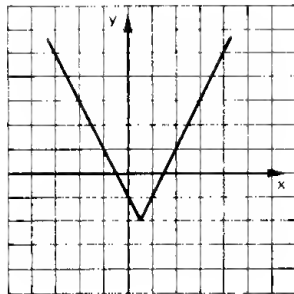
b)



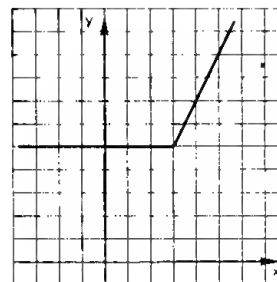
A.259 a)



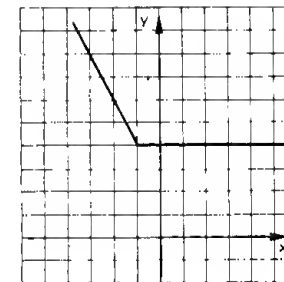
b)



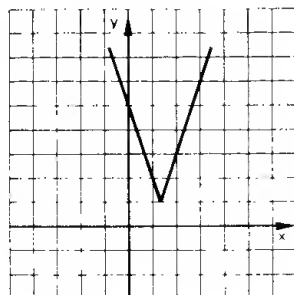
c)



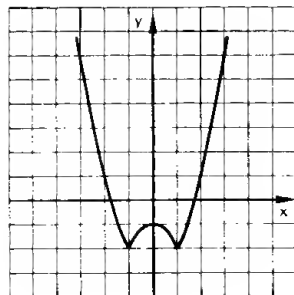
d)



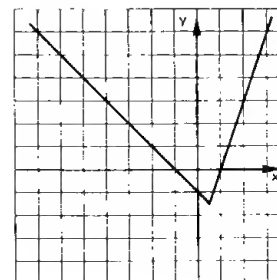
c)



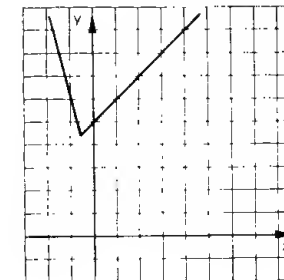
d)

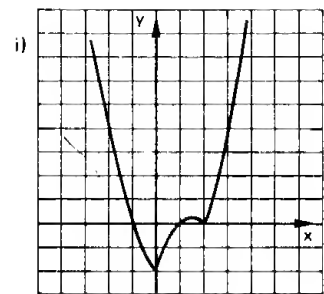
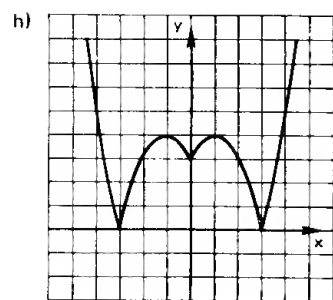
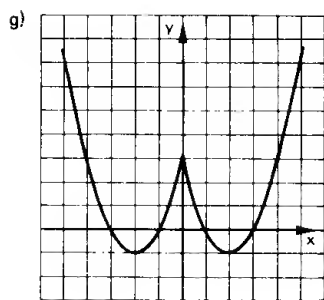


e)

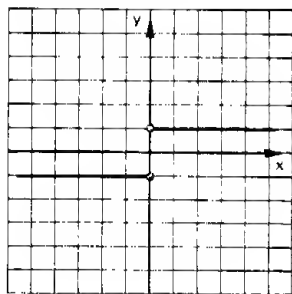


f)

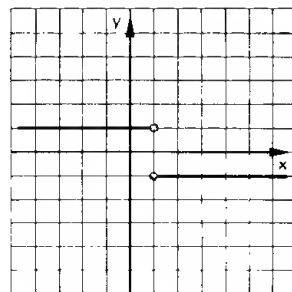




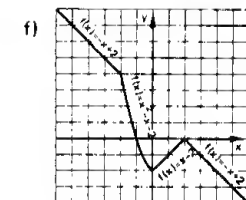
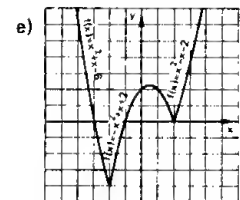
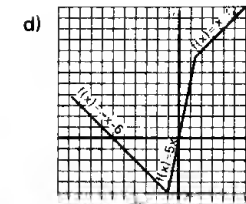
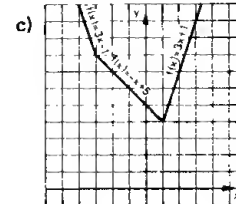
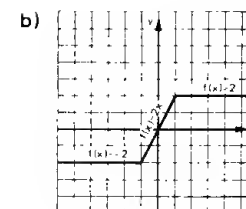
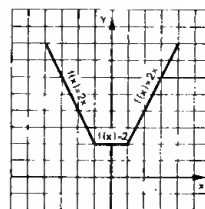
A.262



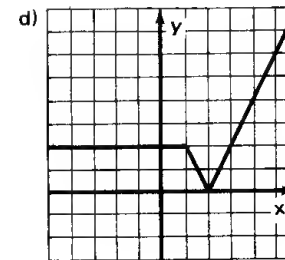
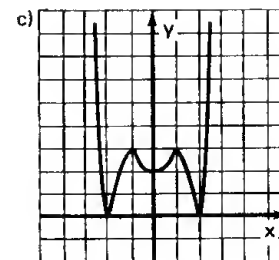
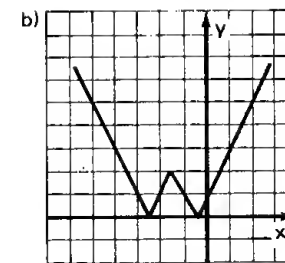
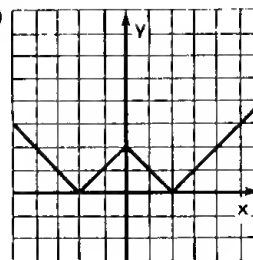
A.263

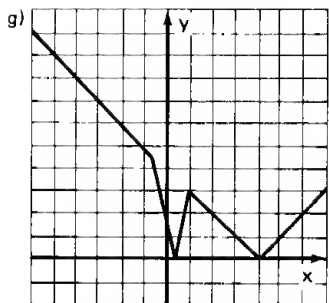
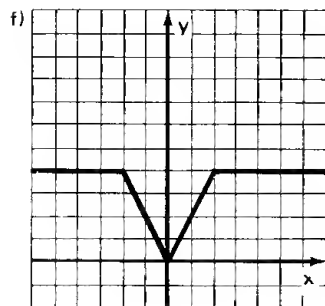
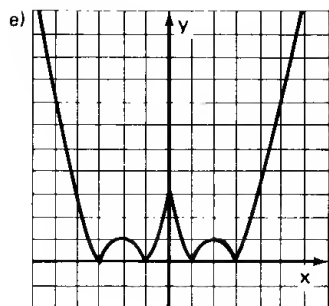


A.265 a)



A.267 a)





- A.268 a) $S = \{1, -5\}$
 b) $S = \{1, -\frac{1}{3}\}$
 c) $S = \{\frac{5}{4}\}$
 d) $S = \emptyset$
 e) $S = \{-1, 1, 2, 4\}$
 f) $S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 3\}$
 g) $S = \{1, 3\}$

- A.269 a) $S = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$
 b) $S = \{2, -\frac{1}{3}\}$
 c) $S = \{-6, -1, 1, 4\}$
 d) $S = \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1\}$

- A.270 a) $S = \{\frac{1}{3}\}$
 b) $S = \emptyset$
 c) $S = \{4, 2\}$
 d) $S = \{-13, -6\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{4}{3}\}$

- A.271 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\}$
 d) $S = \{-\frac{4}{3}\}$
 e) $S = \emptyset$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$
 g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0\}$
 h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 1\}$
 i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{3}\}$
 j) $S = \mathbb{R}$
 k) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ ou } 2 < x \leq 4\}$
 A.272 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1\}$
 g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3} \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
 h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
 i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0 \text{ ou } 1 \leq x \leq 4\}$

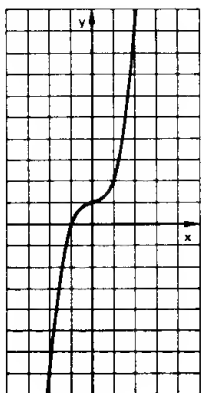
- A.274 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ ✓
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
 d) $S = \mathbb{R}$
 e) $S = \emptyset$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$
 g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$

A.275 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

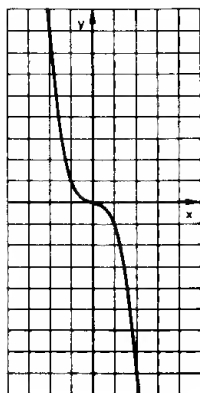
- A.277 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } 1 < x < 5\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 0\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } -3 \leq x \leq 7\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < \frac{11}{3}\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$
 g) $S = \emptyset$

A.278 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$

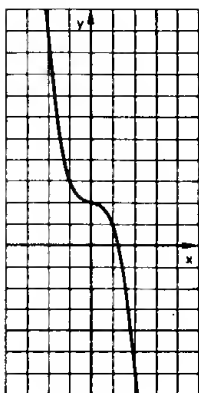
A.279 a)



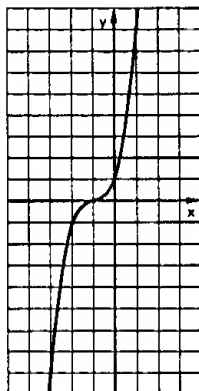
b)



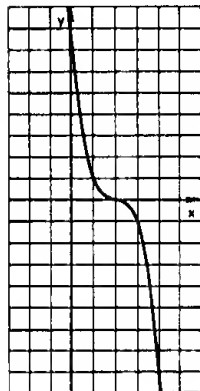
c)



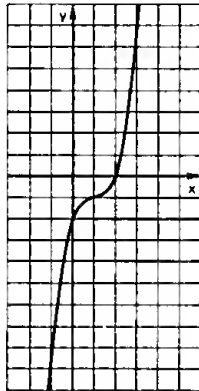
d)



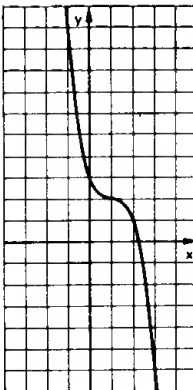
e)



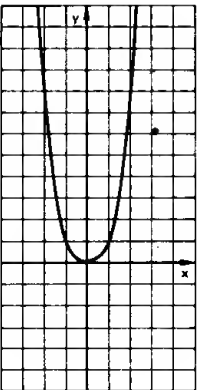
f)



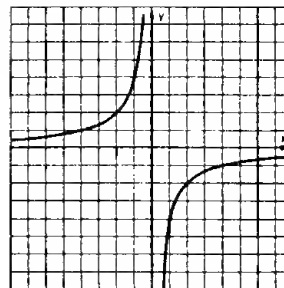
g)



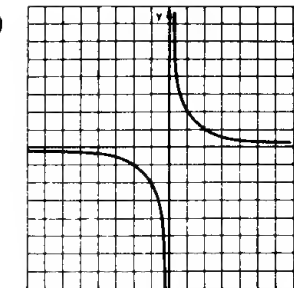
h)



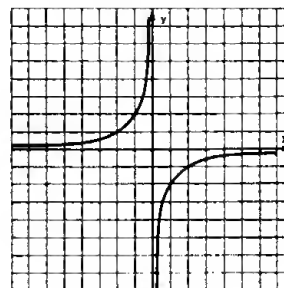
A.280 a)



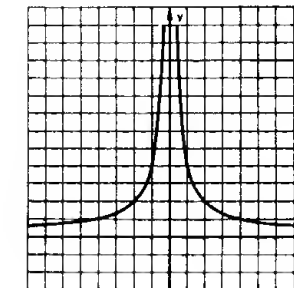
b)



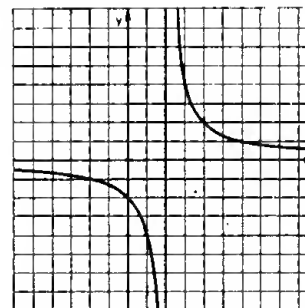
c)



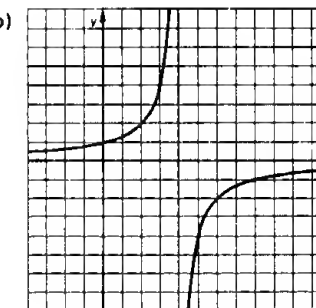
d)



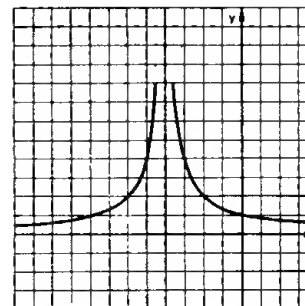
A.282 a)



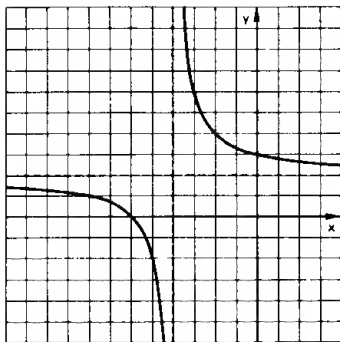
b)



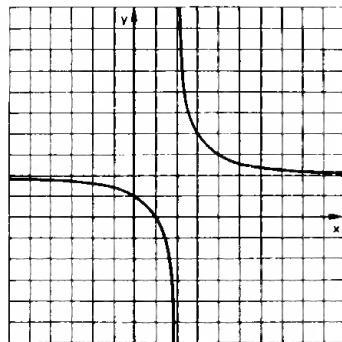
c)



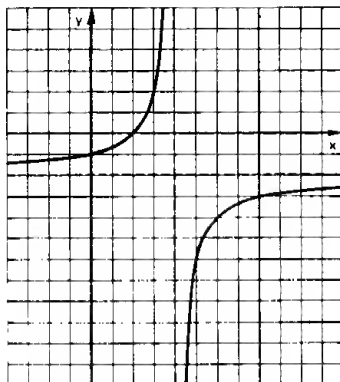
A.284 a)



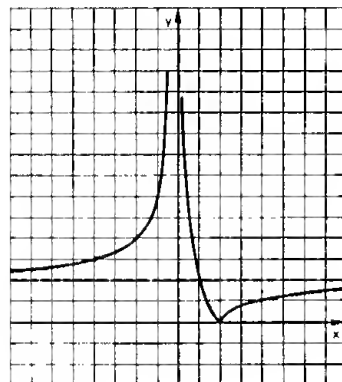
b)



c)

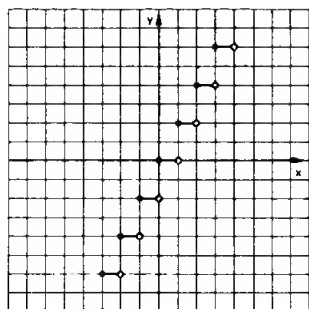


d)

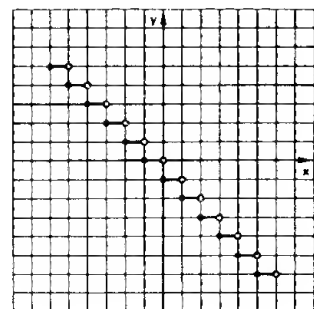


A.285 $\frac{35}{12}$

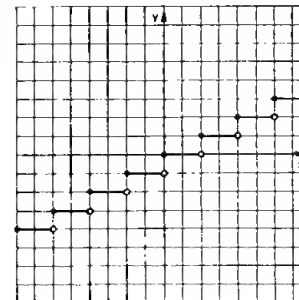
A.286 a)



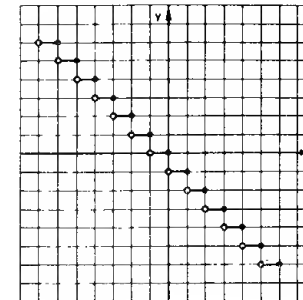
b)



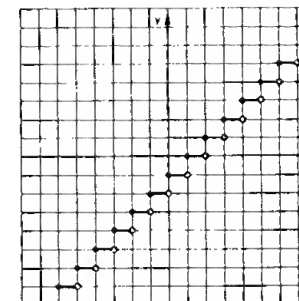
A.288 a)



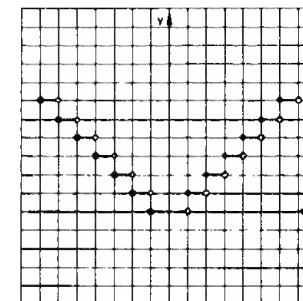
b)



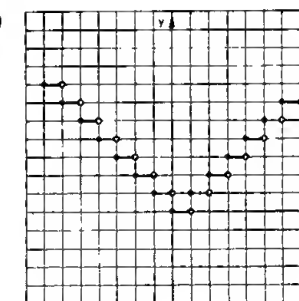
c)



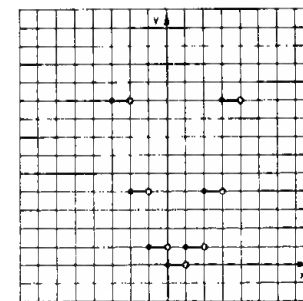
d)



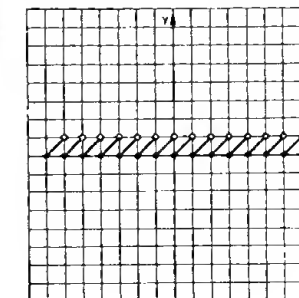
e)



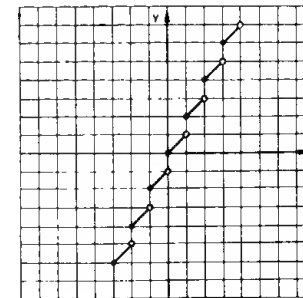
f)



g)



h)



CAPÍTULO X

A.290 a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$
 $(g \circ f)(x) = 5 + 2x - 2x^2$
 b) $(f \circ g)(-2) = 18$, $(g \circ f)(-2) = -7$

c) $x = 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$

A.291 $(f \circ g)(x) = x^4 - 6x^2 + 6$
 $(g \circ f)(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$

A.292 $(f \circ g)(x) = 2$, $(g \circ f)(x) = 5$

A.293 a) $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 11$

b) $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$

c) $(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^2 + 6$

d) $(g \circ g)(x) = x - 6$

A.294 $f(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1$

$f(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 7$

A.295 $a = 1$

A.299 a) $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

A.300 a) $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{2x+4}{2x+1}$

b) $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{5x-4}{x-2}$

A.301 $[(h \circ g) \circ f](x) = 12x^2 + 12x + 2$

A.302 $[h \circ (g \circ f)](x) = 2x^2 - 2x + 7$

A.304 $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2}$

A.306 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2}$

A.307 $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ para $x \neq 1$

A.309 $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x + 3 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9 & \text{se } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

A.310 $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 9x^2 - 12x + 6 & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{1}{3x} & \text{se } \frac{1}{3} < x < 1 \\ -9x^2 + 12x & \text{se } x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -3x^2 - 4 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{2x-7}{x-2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 10 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

A.311 $f \circ g(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - 4x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2 & \text{se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$g \circ f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } x > \frac{5}{4} \\ -16x^2 + 24x - 8 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A.312 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{se } x \geq -1 \\ 2x + 9 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

A.313 a) injetora b) sobrejetora d) bijetora e) não é injetora e nem sobrejetora

A.314 a) injetora b) bijetora c) sobrejetora d) não é injetora e nem sobrejetora

A.315 a) III b) IV c) II d) I
 e) II f) III g) III h) II

A.316 $b = 2$

A.317 $a = \frac{3}{4}$

A.318 a) III b) II c) I
 d) II e) II f) II

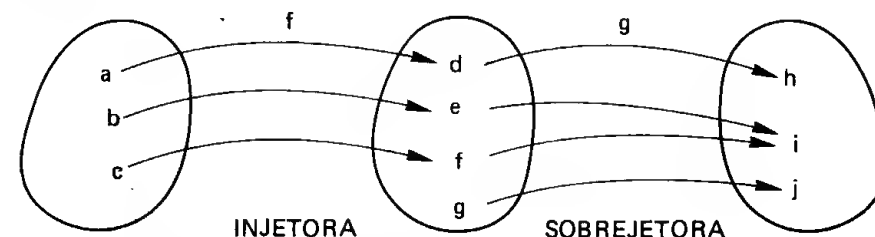
A.320 As funções I_A e I_B são iguais se e somente se $A = B$

A.321 $m \leq n$, $m \geq n$, $m = n$

A.322 12

A.323 6

A.324



$g \circ f$ não é injetora nem sobrejetora.

A.326 a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

c) $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

e) $q^{-1}(x) = x^3 - 2$

g) $s^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4}$

d) $p^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

f) $r^{-1}(x) = (x+1)^3$

A.327 Não, pois f não é injetora, por exemplo: $f(-1) = f(1) = 1$, e portanto f não é bijetora.

A.329 a) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{-x}$

e) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}_-$
 $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

g) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}_-$
 $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{-x}$

f) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$

A.381 a) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$
 $f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{x-1}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$
 $f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

e) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}^*$
 $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-4}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$
 $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$
 $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3x-5}$

f) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$
 $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-3}$

A.333 É o $\sqrt{17}$ pois $f^{-1}(\sqrt{17}) = 3$, isto é,
 $f(3) = \sqrt{17}$

A.335 a) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

c) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

e) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{9-x}$

g) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = \frac{5 + \sqrt{8x+9}}{4}$

b) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-1}$

d) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{4x+1}}{2}$

f) $f^{-1}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$
 $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{5-x}$

A.337 a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2} & \text{se } x \geq 7 \\ \frac{x-1}{3} & \text{se } x < 7 \end{cases}$

b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{3} & \text{se } x \leq 8 \\ \frac{4-x}{4} & \text{se } x > 8 \end{cases}$

c) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x < -3 \\ \frac{x-1}{4} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$

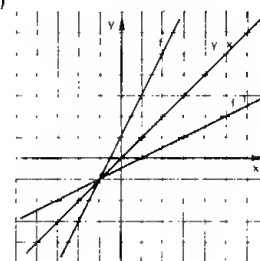
e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3 - \sqrt[3]{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-3} & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x-3} & \text{se } x \leq -3 \end{cases}$

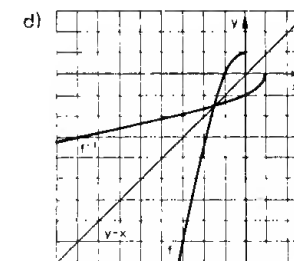
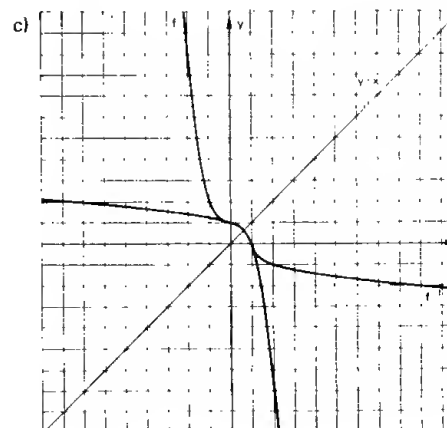
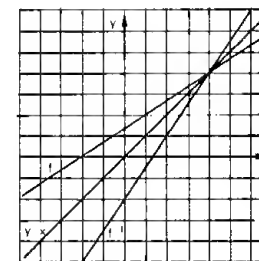
A.338 Não, pois f não é injetora, por exemplo $f(-2) = f(1) = 3$, portanto f não é bijetora.

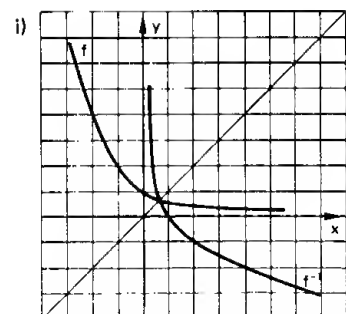
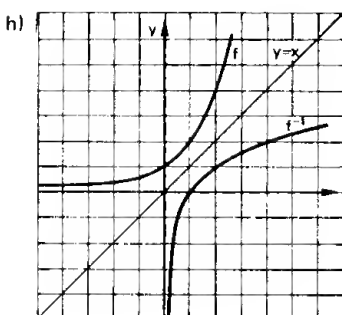
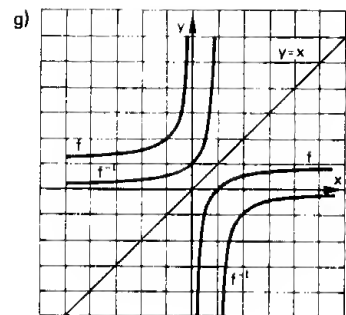
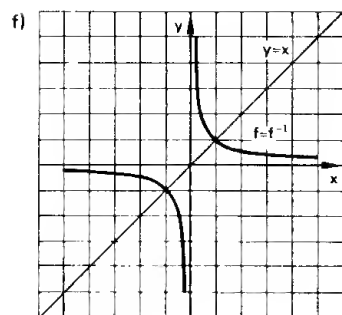
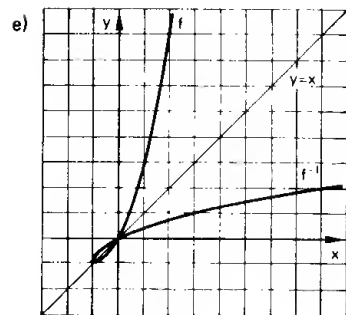
A.339 $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 7 \\ \frac{x+3}{5} & \text{se } -8 \leq x < 7 \\ \frac{x+5}{3} & \text{se } x < -8 \end{cases}$

A.341 a)



b)





A.343 a) $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{12}$$

c) $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$

e) $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow A$
 $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt{x^2-3}$

A.344 Não, pois g não é injetora, por exemplo: $g(-1) = g(1) = 0$, portanto $g \circ f$ não é bijetora.

b) $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$$

d) $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow A$
 $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{2}$

A.345 $[h \circ (g \circ f)]^{-1} : B \rightarrow A$
 $[h \circ (g \circ f)]^{-1}(x) = \frac{2 - \sqrt{x+1}}{4}$

A.347 a) $S = \{6\}$

c) $S = \{1, 4\}$

e) $S = \{0, \frac{7}{3}\}$

g) $S = \{13\}$

i) $S = \{3, 4\}$

k) $S = \{0\}$

m) $S = \emptyset$

o) $S = \{\frac{5}{4}\}$

A.348 $S = \{5\}$

A.349 $S = \emptyset$

A.351 a) $S = \{4, 9\}$

c) $S = \emptyset$

e) $S = \{1, \sqrt[3]{25}\}$

g) $S = \{16\}$

i) $S = \{1, \frac{1}{16}\}$

A.353 a) $S = \{-2, \frac{1}{3}\}$

c) $S = \{4, -3, \frac{1 + \sqrt{29}}{2}, \frac{1 - \sqrt{29}}{2}\}$

d) $S = \emptyset$

A.354 $S = \{0, 1, 4\}$

A.356 a) $S = \{64\}$

d) $S = \{34\}$

A.357 a) $S = \{0, 4\}$

d) $S = \{1, 17\}$

g) $S = \{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$

A.358 a) $S = \{6\}$

d) $S = \{3\}$

b) $S = \emptyset$

e) $S = \{\frac{177}{4}\}$

b) $S = \{2\}$

e) $S = \{8\}$

b) $S = \{\frac{5}{11}\}$

e) $S = \{3a\}$

c) $S = \{\frac{5}{4}\}$

f) $S = \{40\}$

c) $S = \{2, 6\}$

f) $S = \emptyset$

c) $S = \{4\}$

- A.360 a) $S = \{3\}$ b) $S = \{19\}$ c) $S = \{2\}$
 d) $S = \{3\}$
- A.361 a) $S = \{3\}$ b) $S = \{\frac{2}{3}\}$ c) $S = \{3, 4\}$
 d) $S = \{4\}$
- A.363 a) $S = \{1\}$ b) $S = \{\frac{1}{4}\}$ c) $S = \{2\}$
- A.364 $S = \{1\}$
- A.365 $S = \{\frac{25}{9}\}$
- A.366 $S = \{0\}$
- A.367 $a \leq b \implies S = \{a\}$
 $a > b \implies S = \{b\}$
- A.368 $S = \{\frac{3a}{4}\}$
- A.369 $a = b = 0 \implies S = \mathbb{R}_+$
 $a \geq b > 0 \implies S = \{\frac{(a-b)^2}{4b}\}$
 $a < b \text{ ou } b = 0 \implies S = \emptyset$
- A.370 a) $b \geq 1 \implies S = \{\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}\}$ b) $a = b \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
 $a \neq b \implies S = \{a+b\}$
 c) $b > a \implies S = \{\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\}$
- A.371 $a < 0 \text{ e } |b| \geq |a| \implies S = \{0, \frac{5a^2 - b^2}{4a}\}$
- A.372 a) $S = \{(9, 4), (4, 9)\}$ b) $S = \{(10 + 4\sqrt{6}, 10 - 4\sqrt{6})\}$
 c) $S = \{(2, 8), (8, 2)\}$ d) $S = \{(9, 4), (4, 9)\}$
- A.373 a) $S = \{(4, 2), (-\frac{9}{2}, \frac{41}{12})\}$ b) $\{(-4, 6)\}$
- A.375 a) $S = \{2\}$ b) $S = \{\frac{7}{4}\}$
 c) $S = \{-16\}$ d) $S = \{4, -3\}$
 e) $S = \{-\frac{2}{3}, 3\}$ f) $S = \{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\}$
 g) $S = \{0\}$ h) $S = \{0, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\}$
 i) $S = \{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$ j) $S = \{0, -3, \frac{1}{4}\}$

- A.376 $S = \emptyset$
- A.378 $S = \{-2, 7\}$
- A.379 $S = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$
- A.380 $S = \{1, 2, 10\}$
- A.382 $S = \{0\}$
- A.383 $S = \{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$
- A.384 $S = \{\frac{4}{5}\}$
- A.385 $S = \{(8, 64), (64, 8)\}$
- A.387 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x < 2\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x \leq 2\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\}$
 e) $S = \emptyset$
- A.388 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
 g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
 h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } 3 \leq x < 12\}$
 i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
- A.390 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 11\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{4}\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geq 1 + \sqrt{3}\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq \frac{1}{5}\}$
 g) $S = \emptyset$

- A.391 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 - \sqrt{6}\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2 + 2\sqrt{2} \leq x \leq \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\}$
 g) $S = \emptyset$ h) $S = \mathbb{R}$
 i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 2\}$

- A.393 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{5} \leq x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 0 \text{ ou } 3 < x \leq 4\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$

- A.395 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x \leq 5\}$
 c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq \frac{13 + \sqrt{201}}{4}\}$
 d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } 3 \leq x \leq 4\}$
 e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geq 3 + \sqrt{2}\}$
 f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
 g) $S = \emptyset$
 h) $S = \mathbb{R}$

- A.396 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leq 1\}$
 b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < x \leq 1\}$

- A.397 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

- b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

- A.399 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 11\}$

- b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

- c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\}$

- d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\}$

- A.400 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq x < 3\}$

- A.401 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-45}{4} < x < 1 \text{ ou } x \geq 9\}$

LÓGICA

TA.1 (FEI-67) Dadas as premissas: "Todos os corintianos são fanáticos" – "Existem fanáticos inteligentes", pode-se tirar a conclusão seguinte:

- a) "existem corintianos inteligentes" b) "todo corintiano é inteligente"
 c) "nenhum corintiano é inteligente" d) "todo inteligente é corintiano"
 e) não se pode tirar conclusão.

TA.2 (FEI-66) Dadas as proposições:

- (1) toda mulher é boa motorista
 (2) nenhum homem é bom motorista
 (3) todos os homens são maus motoristas
 (4) pelo menos um homem é mau motorista
 (5) todos os homens são bons motoristas

a negação de (5) é

- a) (1) b) (2) c) (3) d) (4) e) nenhuma das anteriores.

TA.3 (EPUSP-66) Depois de n dias de férias, um estudante observa que

- (1) choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde
 (2) quando chove de manhã não chove à tarde
 (3) houve 5 tardes sem chuva
 (4) houve 6 manhãs sem chuva

Então n é igual a:

- a) 7 b) 9 c) 10 d) 11 e) nenhuma das respostas anteriores.

TA.4 (EPUSP-66) Em um baile há r rapazes e m moças. Um rapaz dança com 5 moças, um segundo rapaz dança com 6 moças, e assim sucessivamente. O último rapaz dança com todas as moças. Tem-se então:

- a) $r = \frac{m}{5}$ b) $r = m - 5$ c) $r = m - 4$ d) $r = m$

e) nenhuma das respostas anteriores

TA.5 (FEI-68) Um teste de Literatura, com 5 alternativas em que uma única é verdadeira, referindo-se à data do nascimento de um famoso escritor, apresenta as seguintes alternativas:

- (a) século XIX (b) século XX
 (c) antes de 1860 (d) depois de 1830
 (e) nenhuma das anteriores

Pode-se garantir que a resposta correta é:

- a) (a) b) (b) c) (c) d) (d) e) nenhuma das anteriores

- TA.6 (MACK-73) Duas grandezas x e y são tais que: "se $x = 3$ então $y = 7$ ".
Pode-se concluir que
- a) se $x \neq 3$ então $y \neq 7$ b) se $y = 7$ então $x = 3$ c) se $y \neq 7$ então $x \neq 3$
d) se $x = 5$ então $y = 5$ e) nenhuma das conclusões acima é válida

TA.7 (CESCEM-71) Indique a afirmação correta:

- a) uma condição necessária para que um número seja maior do que 2 é que ele seja positivo
b) uma condição suficiente para que um número seja maior do que 2 é que ele seja positivo
c) uma condição necessária e suficiente para que um número seja maior do que 2 que ele seja positivo
d) toda condição suficiente para que um número seja positivo é também suficiente para que ele seja maior do que 2
e) nenhuma das afirmações anteriores é correta

TA.8 (SANTA CASA-77) Dispõe-se de alguns livros de Física do autor A, outros do autor B e outros do autor C. Da mesma forma, temos alguns livros de Química do mesmo autor A, outros de B e outros de C. Todos os livros devem ser colocados em duas caixas com o seguinte critério: na primeira caixa, deve-se colocar todos os livros que satisfaçam a condição "se for do autor A, então não pode ser de Física". Na segunda caixa, somente os livros que não satisfazem a essa proposição.
A primeira caixa deve conter exatamente:

- a) todos os livros de Química do autor A mais todos os livros de Física dos autores B e C
b) todos os livros de Física ou de Química dos autores B e C mais todos os livros de Química do autor A
c) todos os livros de Física dos autores B e C
d) todos os livros de Física do autor A
e) todos os livros de Química dos autores A, B e C

CONJUNTOS

TA.9 (MACK-73) Seja o conjunto $A = \{3, \{3\}\}$ e as proposições:

- 1) $3 \in A$ 2) $\{3\} \subset A$ 3) $\{3\} \in A$

então:

- a) apenas as proposições 1) e 2) são verdadeiras
b) apenas as proposições 2) e 3) são verdadeiras
c) apenas as proposições 1) e 3) são verdadeiras
d) todas as proposições são verdadeiras
e) nenhuma proposição é verdadeira

TA.10 (CESCEM-77) Sendo $A = \{\emptyset; a; \{b\}\}$, com $\{b\} \neq a \neq b \neq \emptyset$, então:

- a) $\{\emptyset, \{b\}\} \subset A$ b) $\{\emptyset, b\} \subset A$ c) $\{\emptyset, \{a\}\} \subset A$
d) $\{a, b\} \subset A$ e) $\{\{a\}, \{b\}\} \subset A$

TA.11 Sendo dado um conjunto A com n elementos indiquemos por a o número de subconjuntos de A. Seja B o conjunto que se obtém acrescentando um novo elemento a A e indiquemos por b o número de subconjuntos de B. Qual a relação que liga a e b?

- a) $2a = b$ b) $a = 2b$ c) $b = a + 1$ d) $a = b$ e) $n \cdot a = (n + 1)b$

TA.12 (MACK-76) Dado o conjunto $C = \{0, 1, 2, 3\}$, o número de subconjuntos próprios de C é:

- a) 6 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

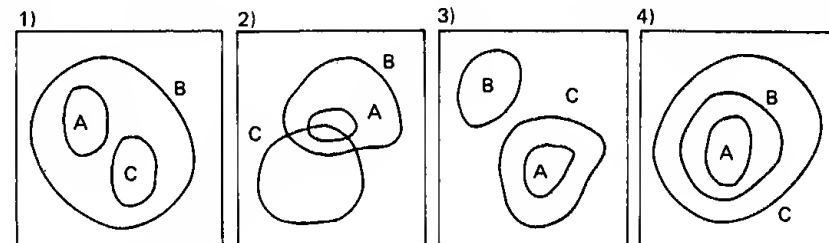
TA.13 (CESCEM-77) Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. O número de elementos de X é:

- a) 32 b) 27 c) 24 d) 22 e) 20

TA.14 (MACK-69) Sendo $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ pode-se afirmar que

- a) $\{1\} \notin A$ b) $\{1\} \subset A$ c) $\{1\} \cap \{2\} \subset A$
d) $2 \in A$ e) $\{1\} \cup \{2\} \in A$

TA.15 (GV-72) Sejam A, B e C três conjuntos não vazios e consideremos os diagramas:



e as denominações

- I) $A \subset B, C \not\subset B, A \cap C \neq \emptyset$ III) $A \subset (B \cap C), B \subset C, C \neq B, A \neq C$
II) $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \emptyset$ IV) $A \cap C = \emptyset, A \neq C, B \cap C = \emptyset$

então as associações corretas são:

- a) (1, IV), (2, III) b) (1, I), (4, III) c) (2, II), (3, IV)
d) (4, III), (1, II) e) (3, IV), (1, I)

TA.16 (PUC-74) A e B são subconjuntos de um mesmo universo. Existem elementos de A que pertencem ao conjunto B. Então, pode-se afirmar:

- a) A é subconjunto de B b) B é subconjunto de A c) A e B são disjuntos
d) $A \cap B \neq \emptyset$ e) nenhuma das anteriores.

TA.17 (PUC-76) Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, então é verdade que:

- a) $A \neq B \Rightarrow A \subset B$ b) $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$ c) $(A \cap B) \subset (B - A)$
d) $(A \cap B) \cup (B - A) = B$ e) $A = B \Rightarrow A \cap B \neq A \cup B$

TA.18 (MACK-74) Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$

$A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 8\}$.

O conjunto C é:

- a) $\{9, 10\}$ b) $\{5, 6, 9, 10\}$ c) $\{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$
d) $\{2, 5, 6, 7\}$ e) $A \cup B$

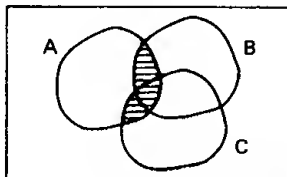
TA.19 (MACK-74) Dentre as seguintes afirmações:

- I) $A \cup B = A \cup C \implies B = C$
II) $A \cup B = A \cup C \implies B \subset C$
III) $A \cup B = A \cup C \implies B \cap C \neq \emptyset$

- a) todas são verdadeiras
b) todas são falsas
c) só I e II são verdadeiras
d) só II é verdadeira
e) só I é falsa

TA.20 (GV-70) A parte hachurada no gráfico, representa:

- a) $A \cap (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cup C$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $A \cup (B \cap C)$
e) nenhuma das respostas anteriores.



TA.21 (CESGRANRIO-76) Sejam $A = (-\infty, 2]$ e $B = [0, +\infty)$ intervalos de números reais. Então $A \cap B$ é:

- a) $\{1\}$ b) $(-\infty, 0]$ c) vazio d) $\{0, 1, 2\}$ e) $[0, 2]$.

TA.22 (PUC-76) Sejam os conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos, C com 4 elementos; então:

- a) $A \cap B$ tem no máximo 1 elemento
b) $A \cup C$ tem no máximo 5 elementos
c) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos
d) $(A \cup B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos
e) $A \cap \emptyset$ tem 2 elementos pelo menos

TA.23 (CESGRANRIO-76) Em uma universidade são lidos dois jornais A e B; exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60% o jornal B. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, o percentual de alunos que lêem ambos é:

- a) 48% b) 140% c) 60% d) 80% e) 40%

TA.24 (CESCEA-6B) Foi realizada uma pesquisa numa indústria X tendo sido feitas a seu operários apenas duas perguntas. Dos operários, 92 responderam sim à primeira B0 responderam sim à segunda, 35 responderam sim a ambas e 33 não responderam a perguntas feitas. Pode-se concluir então que o número de operários da indústria é

- a) 170 b) 172 c) 205 d) 174 e) 240

TA.25 (GV-76) De todos os empregados de uma firma, 30% optaram por um plano de assistência médica. A firma tem a matriz na Capital e somente duas filiais, uma em Santos e outra em Campinas. 45% dos empregados trabalham na matriz e 20% dos empregados trabalham na filial de Santos. Sabendo-se que 20% dos empregados da Capital optaram pelo plano de assistência médica e que 35% dos empregados da filial de Santos o fizeram, qual a porcentagem dos empregados da filial de Campinas que optaram pelo plano?

- a) 47% b) 32% c) 38% d) 40% e) 29%

TA.26 (CESCEA-69) Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{a, c, d, e\}$ o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$ é

- a) $\{a, b, c, e\}$ b) $\{a, c, e\}$ c) A d) $\{b, d, e\}$ e) $\{b, c, d, e\}$

TA.27 (CESCEA-72) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, -1, 0, 4, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 4, 2, 0, 5, 7\}$ assinale a afirmação verdadeira:

- a) $A \cup B = \{2, 4, 0, -1\}$ b) $A \cap (B - A) = \emptyset$
c) $A \cap B = \{-1, 4, 2, 0, 5, 7, 3\}$ d) $(A \cup B) \cap A = \{-1, 0\}$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.28 (CESCEA-73) Sejam \mathbb{R} o conjunto dos números reais, e

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0\}.$$

Assinale dentre as afirmações abaixo a correta:

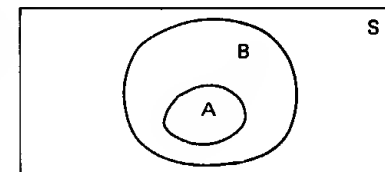
- a) $(A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
b) $C - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2\}$
c) $A - (B \cap C) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$
d) $A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\}$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.29 (PUC-75) Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$, então:

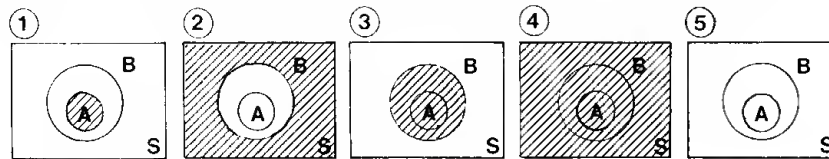
- a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 5\}$
c) $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$
d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
e) $\bigcap_A B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$

TA.30 (CV-74) Considere os conjuntos dados no gráfico. Apenas uma das afirmações é verdadeira. Qual?

- a) $\overline{A} \cup \overline{B} = S$ b) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B}$
c) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ d) $\overline{A} \subset \overline{B}$
e) $\overline{A} \cap \overline{B} = B$



TA.31 (GV-75) Considere a parte hachurada nos diagramas, onde A e B são subconjuntos de S



considere as denominações:

- a) $B - A$ b) $\bar{A} \cup B$ c) $A \cap \bar{B}$ d) $A \cap B$ e) \bar{B}

As associações corretas estão na alternativa:

- a) (1, d), (4, b), (5, e) b) (3, a), (2, e), (5, c) c) (3, a), (2, c), (5, d)
d) (1, c), (4, b), (2, e) e) (3, d), (4, b), (2, a)

TA.32 (GV-76) Denotando-se por x' o complementar de um conjunto qualquer x , então qualquer que sejam P e Q, o conjunto $[P' \cup (P \cap Q)]$ é igual a:

- a) $P' \cap Q$ b) $P \cup Q'$ c) $P \cap Q'$ d) $P' \cup Q$ e) \emptyset (conjunto vazio)

TA.33 (PUC-77) Sabendo-se que: A e B são subconjuntos de U, $\bar{A} = \{e, f, g, h, i\}$
 $A \cap B = \{c, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, então:

Observação: \bar{A} : complementar de A em relação a U.

- a) A tem 2 elementos e B tem 4 elementos
b) A tem 4 elementos e B tem 2 elementos
c) A tem 3 elementos e B tem 3 elementos
d) A tem 4 elementos e B tem 4 elementos
e) A tem 1 elemento e B tem 5 elementos

TA.34 (MACK-75) Dados M, N e P, subconjuntos não vazios de E, e as afirmações:

- I) $M \cup N = M \iff N \subset M$;
II) $M \cap N = M \iff M \subset N$;
III) $(P \subset M \text{ e } P \subset N) \iff P \subset (M \cap N)$;
IV) $M \subset N \iff M \cap \bigcup_E N = \emptyset$;
V) $M \subset N \iff N \cup \bigcup_E M = E$;

então o número de afirmações corretas é:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

CONJUNTOS NUMÉRICOS

TA.35 (CESGRANRIO-77) A intersecção dos três conjuntos

$$\mathbb{R} \cap \mathbb{C}, (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$$

é:

- a) \mathbb{N} b) \emptyset c) \mathbb{Q} d) \mathbb{R} e) \mathbb{Z}

TA.36 (FUVEST-77) Em um teste de cinco alternativas, com uma única correta, as alternativas eram:

- A) Racional B) Irracional C) Inteiro D) Real E) Complexo

A alternativa correta era:

- a) A b) B c) C d) D e) E

TA.37 (CESCEA-68) Se n e m são números naturais e se $n \leq m \leq S(n)$, onde $S(n)$ é o sucessor de n , então, é sempre verdade que:

- a) $m = n$ ou $m = S(n)$ b) $m < n$ c) $m > n + 1$
d) $n < m$ e) $m = n$ e $m = S(n)$

TA.38 (CESCEA-68) Quaisquer que sejam m , n e p de \mathbb{Z} têm-se:

- a) $n \neq 0 \implies \frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ b) $p \neq 0 \implies \frac{p \cdot m + p \cdot n}{p} \in \mathbb{Z}$
c) $p \neq 0 \implies \frac{p \cdot m + m \cdot n}{p} \in \mathbb{Z}$ d) $\frac{m + n}{p} \in \mathbb{Z}$ se e somente se
e) $(m + n)^p = m^p + n^p$ $p \neq 0$ e $p = m + n$

TA.39 (CESGRANRIO-76) Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 40, n \text{ múltiplo de } 2, n \text{ não múltiplo de } 3\}$. O número de elementos de H é

- a) 12 b) 14 c) 7 d) 13 e) 6

TA.40 (FUVEST-77) Sejam a e b números naturais e p um número primo.

- a) se p divide $a^2 + b^2$ e p divide a, então p divide b
b) se p divide ab, então p divide a e p divide b
c) se p divide $a + b$, então p divide a e p divide b
d) se a divide p, então a é primo
e) se a divide b e p divide b, então p divide a

TA.41 (PUC-69) O menor número inteiro positivo x para que $2940x = M^3$ onde M é um inteiro é:

- a) 2040 b) 1960 c) 3150 d) 2060 e) nada disso

TA.42 (EPUSP-66) Se a_2 e x forem números reais tais que $x < a < 0$, então

- a) $x < ax < 0$ b) $x^2 > ax > a^2$ c) $x^2 < a^2 < 0$
d) $x^2 > ax$ mas $ax < 0$ e) nenhuma das respostas anteriores

TA.43 (CESCEA-75) Assinalar dentre as afirmações seguintes a correta, quaisquer que sejam os números reais A, B e C com $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

- a) $\frac{A}{B} \geq C \implies A \geq BC$ b) $A \geq B \implies \frac{A}{B} \geq 1$
c) $AB > C \implies ABC > C^2$ d) $\frac{A}{C} < B \implies \frac{A}{|B|C} < -1$ se $B < 0$
e) $AB \geq C \implies \frac{AB}{|C|} \leq -1$ se $C < 0$

TA.44 (GV-73) Sejam a, b e c números reais quaisquer. Assinale a afirmação verdadeira.

- a) $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ b) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$
 c) $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$
 d) $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ e) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

TA.45 (PUC-70) Sendo a e b números reais quaisquer e m um real diferente de zero, então:

- a) $a > b$ e $am > bm$ então $m = 1$
 b) $a \geq b$ e $am \leq bm$ então $m < 0$
 c) $a \geq b$ e $am \geq bm$ então $m \geq 1$
 d) $a < b$ e $am < bm$ então $m < 0$
 e) nenhuma das respostas anteriores é correta.

TA.46 (FEI-68) A desigualdade $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ se verifica

- a) quaisquer que sejam os reais x e y b) para $x \neq 0$
 c) para quaisquer x e y de mesmo sinal d) para quaisquer x e y de sinais contrários
 e) nenhuma das anteriores.

TA.47 (CESCEM-66) A desigualdade $(x + y)^2 > x^2 + y^2$, sendo x e y diferentes de zero

- a) é sempre verdadeira
 b) só é verdadeira se x e y forem positivos
 c) só é verdadeira se x e y forem negativos
 d) só é verdadeira se x e y tiverem o mesmo sinal
 e) só é verdadeira se x e y tiverem sinais contrários

TA.48 (EPUSP-66) O número x não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2 . Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$. Pode-se então concluir que:

- a) $x \leq -1$ ou $x > 3$ b) $x \geq 2$ ou $x < 0$ c) $x \geq 2$ ou $x \leq -1$
 d) $x > 3$ e) nenhuma das respostas anteriores.

TA.49 (PUC-76) Se $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in \mathbb{B}\}$, então

- a) n é um número natural ímpar se $\mathbb{B} = \mathbb{R}$
 b) n é um número natural ímpar $\forall p \in \mathbb{B}$
 c) n é um número natural ímpar se e somente se $\mathbb{B} = \mathbb{Z}$
 d) n é um número natural ímpar se e somente se $\mathbb{B} = \mathbb{N}$
 e) n é um número natural ímpar se e somente se $\mathbb{B} = \mathbb{N}^*$

TA.50 (FUVEST-77) Assinale a correta:

- a) $0,5999... < \frac{2}{\sqrt{5} + 1} < \frac{2}{3}$ b) $0,5999... < \frac{2}{\sqrt{5} + 1}$
 c) $\frac{2}{\sqrt{5} + 1} < 0,5999... < \frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{\sqrt{5} + 1} < \frac{2}{3} < 0,5999...$
 e) $\frac{2}{3} < \frac{2}{\sqrt{5} + 1} < 0,5999...$

TA.51 (CESGRANRIO-77) Considere a expressão

$$0,999... + \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{15}}$$

Efetuada as operações indicadas e simplificando, obtemos:

- a) $\frac{9}{10}$ b) 2 c) $\frac{19}{10}$ d) $\frac{15}{9}$ e) 1

TA.52 (CESCEA-67) Dados abaixo grupos de dois números reais, expressos decimalmente, qual dentre eles é constituído somente de números racionais?

- a) $1,000...0...$ e $790,0721721...721...$
 b) $0,010010001...$ e $3,590888...8...$
 c) $68,01002000300004...$ e $1,30892...892...$
 d) $447,50047047...047...$ e $37,101112131415161718...$
 e) nada disso

TA.53 (CESCEA-68) Designemos por A o conjunto de todos os números reais da forma $\frac{a}{b}$,

com a e b inteiros não negativos e $b \neq 0$. Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são dois elementos quaisquer de A tem-se que:

- a) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in A$ b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in A$ se e somente se $a = c$
 c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in A$ d) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \in A$
 e) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e somente se $b = d$.

TA.54 (PUC-74) Um número racional qualquer:

- a) tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais
 b) tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais
 c) não pode expressar-se na forma decimal exata
 d) nunca se expressa na forma de uma decimal inexata
 e) nenhuma das anteriores

TA.55 (CESCEM-70) Assinalar a afirmação falsa:

- a) a soma de dois números irracionais pode ser racional
 b) a soma de um racional com um irracional é sempre irracional
 c) o inverso de um irracional é sempre irracional
 d) o produto de dois irracionais é sempre irracional
 e) a raiz quadrada positiva de um número irracional positivo é sempre irracional

TA.56 (GV-74) Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y , pode-se dizer que:

- a) $x \cdot y$ é irracional b) $y \cdot y$ é irracional c) $x + y$ é racional
 d) $x - y + \sqrt{2}$ é irracional e) $x + 2y$ é irracional

TA.57 (CESCEM-71) Dada uma sequência de números positivos a_1, a_2, \dots, a_n um algoritmo utilizado em computadores eletrônicos para saber se algum dos elementos da sequência é um quadrado perfeito é o seguinte:

1. Construir uma nova sequência b_1, b_2, \dots, b_n , obtida da primeira pela extração da raiz quadrada de cada um de seus elementos.
2. Construir uma nova sequência c_1, c_2, \dots, c_n , a partir da anterior, onde cada c_i é menor inteiro contido em b_i .
3. Construir a sequência d_1, d_2, \dots, d_n , obtida da anterior elevando-se os elementos c_i ao quadrado.
4. Comparar os elementos da sequência d_i com os respectivos da sequência a_i . Os que forem iguais são quadrados perfeitos.

Nestas condições, dadas as sequências abaixo

a_i :	a_1	a_2	a_3
b_i :	2,71	4	b_3
c_i :	2	c_2	531
d_i :	4	d_2	271961

os dados são suficientes para afirmar que:

- a) a_2 é quadrado perfeito
- b) a_3 é quadrado perfeito
- c) somente a_2 é quadrado perfeito
- d) somente a_3 é quadrado perfeito
- e) nem a_1 nem a_3 são quadrados perfeitos

TA.58 (MACK-74) Os números reais x e y são tais que $x > 1 > y$. Sejam $S = x + y$ e $P = xy$. Nessas condições:

- a) $S > P$
- b) $P > S$
- c) S pode ser maior, igual ou menor que P
- d) S pode ser maior ou menor, mas nunca igual a P
- e) nenhuma das anteriores.

TA.59 (FCESP-74) O número real r que não pode ser escrito sob a forma $r = \frac{x+1}{x}$, x real, é

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 2
- e) 3

TA.60 (PUC-76) Se $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1\}$, então

- a) $X = \mathbb{R}$
- b) $X = \mathbb{R}^+$
- c) $X = \emptyset$
- d) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x \in X$
- e) $X = \mathbb{R}^*$

TA.61 (FEI-68) Sendo x um número real positivo qualquer, tem-se

- a) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 1 + x$ para algum $x > 0$
- b) $\sqrt{x} + \sqrt{x} < 1 + x$ para qualquer $x > 0$
- c) $\sqrt{x} + \sqrt{x} > 1 + x$ para qualquer $x > 0$
- d) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$, para qualquer $x > 0$
- e) nenhuma das anteriores.

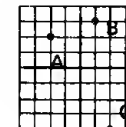
RELAÇÃO BINÁRIA

TA.62 Se a é um número negativo e b é um número positivo então assinale a correta:

- a) (a, b) está no 1º quadrante
- b) (b, a) está no 2º quadrante
- c) $(b, -a)$ está no 1º quadrante
- d) $(a, -b)$ está no 4º quadrante
- e) $(-a, -b)$ está no 3º quadrante

TA.63 Se as coordenadas de A e B são respectivamente $(-2, 2)$ e $(-3, -1)$ então as coordenadas de C são:

- a) $(2, -4)$
- b) $(-4, -2)$
- c) $(4, -2)$
- d) $(-4, 2)$
- e) $(-2, 4)$



TA.64 (CESCRANRIO 73) Sendo $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$, o produto cartesiano $A \times B$ é dado por:

- a) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
- b) $\{(1, 2), (3, 2), (1, 4), (3, 4)\}$
- c) $\{(1, 3), (1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$
- d) $\{(1, 2), (3, 4)\}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.65 (CESGRANRIO-74) Sejam $F = \{1, 2, 3, 4\}$ e $G = \{3, 4, 7\}$. Então:

- a) $F \times G$ tem 12 elementos
- b) $G \times F$ tem 9 elementos
- c) $F \cup G$ tem 7 elementos
- d) $F \cap G$ tem 3 elementos
- e) $(F \cup G) \cap F = \emptyset$

TA.66 (UFF-71) Sabendo que A e B são dois conjuntos tais que:

- 1º) $(1, 7), (5, 3)$ são elementos de $A \times B$
- 2º) $A \cap B = \{1, 3\}$

podemos afirmar com toda segurança que:

- a) $A \times B$ tem 8 elementos
- b) $A \times B$ tem mais de 8 elementos
- c) $A \times B$ tem menos de 8 elementos
- d) $A \times B$ não pode ter 9 elementos
- e) nada se pode afirmar sobre o número de elementos de $A \times B$

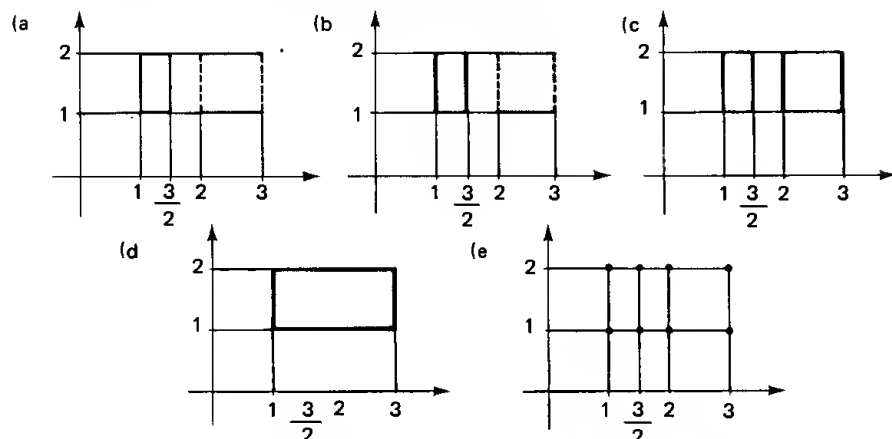
TA.67 (CESCEA-73) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, \{a\}\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(1, a), (1, \{a\}), (2, a), (2, \{a\}), (3, a), (3, \{a\})\}$. Entre as relações abaixo, uma e apenas uma, é falsa. Assinale-a:

- a) $\{a\} \in B$ e $\{a\} \subset B$
- b) $\{(1, a), (1, \{a\}), (2, a)\} \subset A \times B$
- c) $\emptyset \subset A \times B$
- d) $\{(a, \{e\}), (1, \{e\})\} \subset A \times B$
- e) nenhuma das anteriores

TA.68 (CESGRANRIO-73) Dados os conjuntos

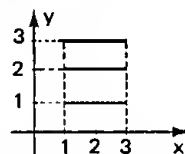
$$A = \left\{1, \frac{3}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\},$$

o gráfico de $A \times B$ é melhor representado por:



TA.69 Com base na representação cartesiana de $A \times B$ abaixo podemos concluir:

- $A = B = \{1, 2, 3\}$
- $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$
- $A = B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
- nenhuma das respostas anteriores.



TA.70 (CESGRANRIO-73) Seja \mathbb{Z} o conjunto dos inteiros. Sejam ainda os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 2\} \text{ e } B = \{3, 4, 5\}.$$

Então, se $D = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x + 4\}$, tem-se que

- $D = A \times B$
- D tem dois elementos
- D tem um elemento
- D tem três elementos
- as quatro afirmativas anteriores são falsas

TA.71 (PUC-77) Sendo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $p(y) : y + 1 \leq 6$ e $F = \{y \in E \mid y \text{ satisfaz } p(y)\}$, tem-se:

Observação: \bar{F} : complementar de F em relação a E

- $E = F$
- $E - F = \emptyset$
- $\bar{F} = \{5, 6, 7, 8\}$
- $(E \cap \bar{F}) \cup F = E$
- $F \cap \emptyset = F$

TA.72 (PUC-77) O domínio da relação $P = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x - 5\}$ é:

- \mathbb{N}
- \mathbb{N}^*
- \mathbb{R}
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 6\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$

TA.73 (PUC-76) O domínio da relação

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{4 - x^2}\} \text{ é:}$$

- \mathbb{R}_+
- \mathbb{R}^*
- \mathbb{R}
- $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq \pm 2\}$

FUNÇÃO

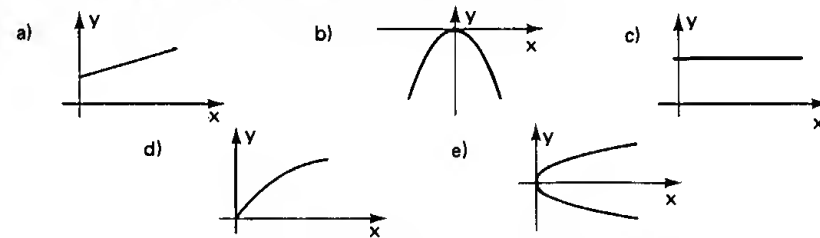
TA.74 (CESCEM-75) Dizemos que uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função ou aplicação de A em B quando todo o elemento de:

- B é imagem de algum elemento em A
- B é imagem de um único elemento de A
- A possui somente uma imagem em B
- A possui, no mínimo, uma imagem em B
- A possui somente uma imagem em B e vice-versa

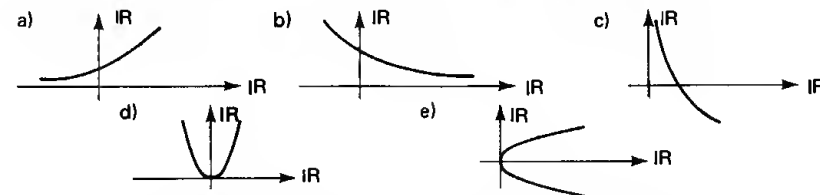
TA.75 (CESGRANRIO-77) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O conjunto dos pontos de interseção do gráfico de f com uma reta vertical.

- possui exatamente dois elementos.
- é vazio.
- é não enumerável
- possui, pelo menos, dois elementos.
- possui um só elemento.

TA.76 (PUC-75) Qual dos gráficos não represente uma função?



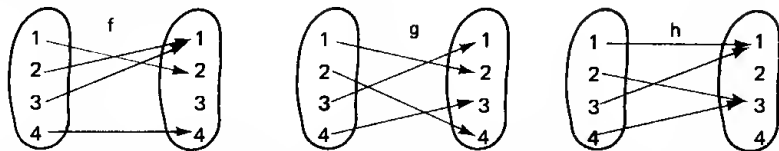
TA.77 (PUC-76) Qual dos gráficos seguintes representa uma função f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} ?



TA.78 (PUC-77) Se x e y são elementos do conjunto \mathbb{R} , qual das relações é função de x ?

- $\{(x, y) \mid x = y^2 - 1\}$
- $\{(x, y) \mid x = |y|\}$
- $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$
- $\{(x, y) \mid x < y\}$
- $\{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$

TA.79 (GV-72) Os diagramas abaixo definem as funções f , g e h de A em A , sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$.



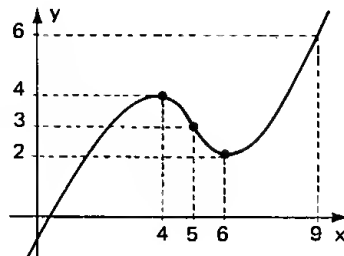
Sejam M , N , P as imagens das funções f , g e h respectivamente. Então $M' \cup N' \cup P'$ onde $X' =$ complementar de X , em relação a A , é o conjunto:

- a) A b) $\{2, 3, 4\}$ c) $\{1\}$ d) \emptyset e) $\{1, 2, 3\}$

TA.80 (CESCEM-76) Se $f: A \rightarrow B$ é uma função a se $D \subset A$, chamamos de imagem de D pela função f ao conjunto anexo a definido por:

$$f[D] = \{y \in B \mid \text{existe } x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Se g é a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} cujo gráfico está representado ao lado, então a imagem $g[5; 9]$ do intervalo fechado $[5; 9]$ é:



- a) $(2; 6)$ b) $[2; 6]$ c) $[3; 6]$ d) $(3; 6)$ e) $[2; 4]$

(CESCEM-68) O enunciado abaixo refere-se aos testes 81 e 82 que o seguem: Seja $f(x)$ uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e que associa a todo inteiro par o valor zero e a todo inteiro ímpar o dobro do valor.

TA.81 $f(-2)$ vale:

- a) zero b) não está definida c) $-f(2)$ d) -2 e) $+2$

TA.82 $f(+\sqrt{4S^2})$, S inteiro, vale:

- a) $2S$ b) $4S$ c) $2\sqrt{4S}$ d) zero e) nenhum dos valores acima.

TA.83 (MACK-77) A função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = 3f(x)$. Se $f(9) = 45$, então:

- a) $f(1) = 5$ b) $f(1) = 6$ c) $f(1) = 9$
d) $f(1)$ não pode ser calculado e) não sai

(CESCEM-69) O enunciado abaixo refere-se aos testes 84 e 85. Seja $f(n)$ uma função definida, para todo n inteiro pelas relações.

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(p+q) = f(p) \cdot f(q) \end{cases}$$

TA.84 O valor da $f(0)$ é:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.85 O valor de $f(-2)$ é:

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) -2
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.86 (CESCEM-71) É dada uma função real tal que:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ 2. $f(1) = 2$ 3. $f(\sqrt{2}) = 4$

O valor de $f(3 + \sqrt{2})$ é:

- a) $(3 + \sqrt{2})^2$ b) 16 c) 24 d) 32
e) impossível de ser determinado pois faltam dados.

TA.87 (FEI-65) Uma função $f(x)$, definida no conjunto dos números reais, sendo a um número real determinado, verifica as propriedades:

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{e} \quad f(x+a) = f(x)$$

Então:

- a) $f(a+x) = f(-x)$ b) $f(x) = f(a)$ c) $f(2a-x) = -f(-x)$
d) $f(2a) = f(a)$ e) nenhuma das anteriores é correta.

TA.88 (CESGRANRIO-76) Sejam \mathbb{Z} o conjunto dos números e $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$. Considere a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = x_1 + \dots + x_n$ onde $x_k = (-1)^k$, para cada $k = 1, \dots, n$. A imagem da função f é o conjunto.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) \mathbb{Z} d) $\{-1, 0, 1\}$ e) $\{-1, 0\}$

FUNÇÕES DO 1º GRAU

TA.89 (MACK-75) A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. O valor de $f(3)$ é:

- a) 0 b) 2 c) -5 d) -3 e) -1

TA.90 (PUC-75) Na função f definida por $f(x) = ax + b$:

- a) o coeficiente b determina o ponto em que a reta corta o eixo das abscissas
b) o coeficiente a determina o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas
c) o coeficiente b determina a inclinação da reta
d) o coeficiente a determina o ponto em que a reta corta o eixo das abscissas
e) o coeficiente b determina o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas

TA.91 (PUC-76) A função $\frac{y}{2} = x + 1$ representa em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uma reta

- a) paralela à reta de equação $y = x + 3$
b) concorrente à reta de equação $y = 2x + 5$
c) igual à reta de equação $y = x + 2$
d) que intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$
e) que intercepta o eixo das abscissas no ponto $(-1, 0)$

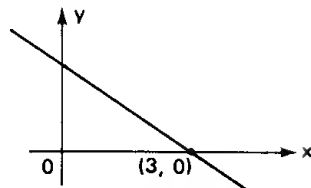
TA.92 (MACK-69) O gráfico de aplicação definida por

$$F = \{(x, y) \in [2, 5] \times [2, 5] \mid y = x\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

onde $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ é

- a) um conjunto finito de pontos b) uma reta
c) uma semi-reta d) um segmento de reta
e) nenhuma das respostas acima é correta.

TA.93 (MACK-76) Examinando o gráfico da função f ao lado, que é uma reta, podemos concluir:



- a) se $f(x) < 0$, então $x > 3$
b) se $x > 2$, então $f(x) > f(2)$
c) se $x < 0$, então $f(x) \leq 0$
d) se $f(x) < 0$, então $x < 0$
e) se $x > 0$, então $f(x) > 0$

TA.94 (EAESP-GV-77) Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, de seguinte forma: e um preço p ele consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$. Sabendo-se que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de Cr\$ 1.250,00, pode-se dizer que a quantidade vendida foi de:

- a) 25 unidades b) 50 unidades
c) 40 unidades d) 35 unidades
e) 20 unidades

TA.95 (CESCEA-74) A equação $(m^2 + 1)x - 2m + 5 = 0$ admite raiz negativa se, e somente se:

- a) $m < \frac{5}{2}$ b) $m > \frac{5}{2}$ c) $m \leq \frac{1}{4}$ d) $m \geq \frac{5}{2}$ e) não sei

TA.96 (CESCEA-74) A solução de inequação $9(x - 5) < -4(1 - x)$ é o conjunto dos números reais x tais que:

- a) $x < -\frac{41}{8}$ b) $x > \frac{41}{2}$ c) $x > 10$ d) $x < \frac{41}{5}$ e) $x < \frac{41}{13}$

TA.97 (MACK-69) A desigualdade $\frac{1}{x+1} \geq 0$ é satisfeita se:

- a) $x > 0$ b) $x > -1$ c) $x < 0$ d) $x \geq -1$
e) nenhuma das respostas acima é correta.

TA.98 (CESGRANRIO-73) Dada a inequação $(3x - 2)^3(x - 5)^2(2 - x)x > 0$, tem-se que a solução é:

- a) $\{x \mid x < 2/3 \text{ ou } 2 < x < 5\}$ b) $\{x \mid 2/3 < x < 2 \text{ ou } x < 0\}$
c) $2/3 \leq x \leq 2$ d) $2/3 < x < 5$
e) diferente das quatro anteriores

TA.99 (CESCEA-75) A solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x - 3) > 1 - 3(x - 5) \end{cases}$$

é o conjunto de todos os números reais x tais que:

- a) $-1 < x < 0$ b) $-1 < x < 1$ c) $-1 < x < \frac{2}{9}$
d) $-1 < x < \frac{1}{3}$ e) $-1 < x < \frac{4}{9}$

TA.100 (FCESP-74) Seja $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; se $1 < x < 2$, então:

- a) $y < -2$ b) $y < 0$ c) $y = 0$ d) $y > 2$ e) $y > 0$

TA.101 (PUC-76) O conjunto verdade da inequação $\frac{x - 3}{5 + x} \geq 0$ é dado por:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x < -5) \text{ e } (x \geq 3)\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid [(x < -5) \text{ ou } (x \geq 3)]\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid [(x \leq 5) \text{ ou } (x \geq 3)]\}$

TA.102 (CESCEA-70) O conjunto de todos os x para os quais $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ é um número real é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

TA.103 (PUC-70) O domínio da função $y = f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ é:

- a) $x < -1$ ou $x \geq 1$ b) $-1 < x \leq 1$
c) $x \neq -1$ e $x \leq 1$ d) $-1 \leq x \leq 1$
e) $x \geq 0$

TA.104 (GV-72) A solução de inequação $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$ é:

- a) $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ b) $x < -1$ ou $0 \leq x < 1$
c) $-1 < x \leq 0$ ou $x > 1$ d) $x \leq 0$
e) $x \neq -1$ ou $x \neq 1$

TA.105 (MACK-76) O conjunto solução de $\frac{6x}{x+3} < 5$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 15 \text{ e } x < -3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 15 \text{ e } x \neq -3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 15\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -15 < x < 15\}$

TA.106 (GV-74) Seja D o conjunto dos números reais x para os quais $\frac{x+1}{x-2} \geq 4$. Então

é o conjunto dos x reais tais que:

- a) $x \leq \frac{9}{2}$ e $x \neq 2$ b) $2 < x \leq 3$
 c) $x > 2$ d) $x < 2$ ou $x > 3$
 e) $-1 \leq x < 2$

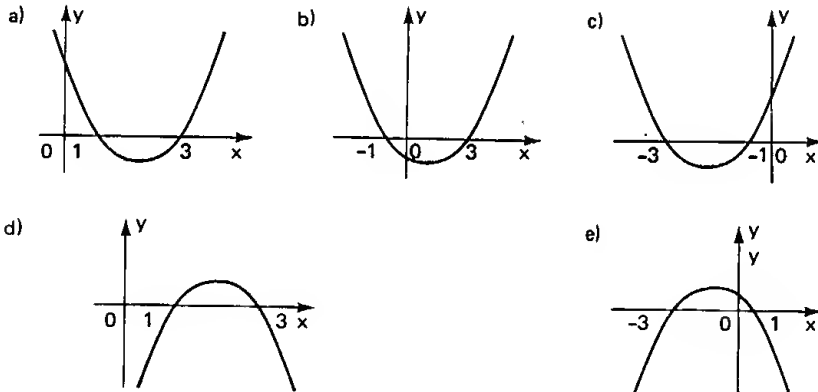
FUNÇÃO QUADRÁTICA

TA.107 (PUC-76) A função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida quando:

- a) $m \neq 4$ b) $m \neq 2$
 c) $m \neq -2$ d) $m = -2$ ou $+2$
 e) $m \neq \pm 2$

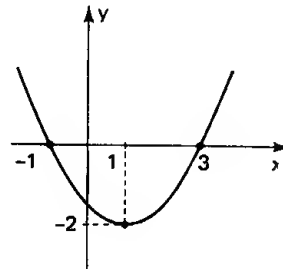
TA.108 (PUC-77) O esboço do gráfico da função quadrática

$$y = 2x^2 - 8x + 6 \text{ é:}$$



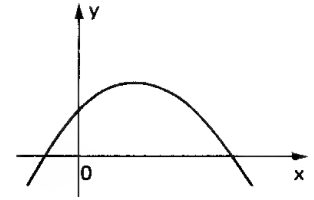
TA.109 (CESCEM-76) Sabe-se que o gráfico ao lado representa uma função quadrática. Esta função é:

- a) $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$
 b) $\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$
 c) $-\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$
 d) $x^2 - 2x - 3$
 e) $x^2 + 2x - 3$



TA.110 (MACK-77) Se $y = ax^2 + bx + c$ é a equação da parábola da figura ao lado, pode-se afirmar que:

- a) $ab < 0$
 b) $ac > 0$
 c) $bc < 0$
 d) $b^2 - 4ac \leq 0$
 e) não sei



TA.111 (PUC-70) O valor máximo da função $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é:

- a) $-\frac{\Delta}{4a}$ se $a < 0$ b) $-\frac{b}{2a}$ se $a > 0$ c) $b^2 - 4ac$ se $a > 0$
 d) $b^2 - 4ac$ se $a < 0$ e) nenhuma das anteriores é correta

TA.112 (CESCEM-72) Considere o gráfico da função $y = x^2 - 5x + 6$. O ponto do gráfico de menor ordenada tem coordenadas:

- a) (2, 3) b) (3, 2) c) (3/2, 1) d) (5/2, -1) e) (5/2, -1/4)

TA.113 (CESCEA-76) A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1, 0) e seu vértice é o ponto de coordenadas (3, v). Então v é igual a:

- a) 8 b) 4 c) 6 d) -5 e) 18

TA.114 (CESCEM-69) Se dois trinômios do 2º grau possuem as mesmas raízes, então:

- a) eles são necessariamente iguais
 b) elas assumem necessariamente um mínimo ou um máximo no mesmo ponto
 c) eles diferem por uma constante
 d) suas concavidades são de mesmo sentido
 e) nenhuma das anteriores

TA.115 (PUC-77) O conjunto imagem da função $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 3\}$ é:

- a) $\{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y \geq \sqrt{3}\}$
 b) $\{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y \geq -3\}$
 c) $\{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y \leq 3\}$
 d) $\{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y \geq 0\}$
 e) $\{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y \leq -3\}$

TA.116 (CICE-68) Seja a função $y = 3x^2 - 12$ definida no intervalo $-4 < x \leq 3$. A imagem de tal função é tal que:

- a) $-2 \leq y \leq 2$ b) $15 \leq y < 36$ c) $15 \leq y \leq 36$
 d) $-12 \leq y < 36$ e) $-12 \leq y \leq 36$

TA.117 (CESCEA-71) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo-se que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, então, o produto a.b.c é:

- a) 20 b) 50 c) -8 d) -70 e) não sei

TA.118 (EPUSP-67) Os trinômios $y = ax^2 + bx + c$ tais que $a + b + c = 0$:

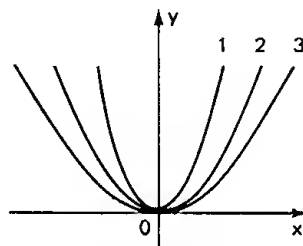
- a) tem em comum um ponto no eixo dos x
- b) tem em comum um ponto no eixo dos y
- c) tem em comum a origem
- d) não tem ponto em comum
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.119 (EPUSP-66) O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, sendo $b \neq 0$ e $c \neq 0$ o gráfico da função obtida da anterior pela mudança de x em $-x$ se interceptam:

- a) em dois pontos, um no eixo dos x e outro no eixo dos y
- b) em um ponto fora dos eixos
- c) somente na origem
- d) em um ponto do eixo dos y
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.120 (MACK-76) No gráfico ao lado estão representadas três parábolas (1), (2), (3), de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$. Podemos concluir que:

- a) $a < b < c < 0$
- b) $c < b < a < 0$
- c) $0 < a < b < c$
- d) $0 < c < b < a$
- e) nenhuma das alternativas anteriores é correta.



TA.121 Dados três pontos no plano cartesiano, não colineares e com abscissas distintas duas duas, o número de funções quadráticas que podem ser encontradas de maneira que esses pontos pertençam aos seus gráficos é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) mais que duas

TA.122 (CONSART-75) Um dia na praia às 10 horas a temperatura era de 36°C e às 14 horas atingiu a máxima de $39,2^\circ\text{C}$. Supondo que nesse dia a temperatura $f(t)$ em graus e uma função do tempo t medido em horas, dada por $f(t) = at^2 + bt + c$, quando $8 < t < 20$, então pode-se afirmar que:

- a) $b = 0$
- b) $ab < 0$
- c) $a = b$
- d) $a > 0$
- e) $b < 0$

TA.123 (CESGRANRIO-77) Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fin com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas (4, 10) deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada - 6. A distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q) é:

- a) 12
- b) 4
- c) 6
- d) 5
- e) 3

TA.124 (PUC-77) As curvas representativas das funções:

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad 2y = -x + 1$$

- a) tem por intersecção os pontos de abscissas $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$
- b) têm por intersecção os pontos de abscissas -1 e $\frac{1}{2}$
- c) têm por intersecção os pontos de abscissas -1 e $\frac{1}{2}$
- d) têm por intersecção os pontos de abscissas $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
- e) não se interceptam.

TA.125 (MACK-75) O gráfico de uma função f é uma parábola que passa pelos pontos (1,0), (3, 0) e (2, -1). O gráfico da função g é uma reta que passa por (1, 0) e (0, -1). A sentença $f(x) = g(x)$:

- a) é falsa qualquer que seja x
- b) é verdadeira se, e somente se, $x = 1$
- c) é equivalente $ax = 1$ ou $x = 4$
- d) implica $x = 0$
- e) é verdadeira se, e somente se, x é um número inteiro

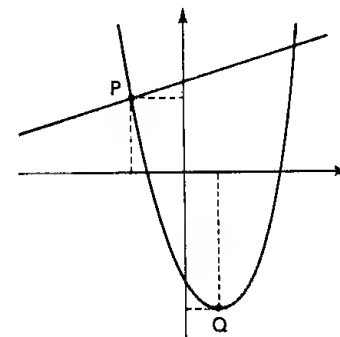
TA.126 (CESCEM-77) Na figura ao lado estão representados os gráficos das funções dadas por

$$f(x) = (x+1)(x-3) \quad \text{e}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

As coordenadas dos pontos P e Q são:

- a) $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$ e (1; -4)
- b) $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$ e (2; -3)
- c) $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$ e (4; -5)
- d) $(-\frac{3}{2}; 4)$ e (2; -3)
- e) $(\frac{3}{2}; 4)$ e (1; -4)



TA.127 (EAESP-GV-77) O menor valor de k para o qual a intersecção da reta $y = 4x + k$ com a parábola $y = 2x^2 + 3x - 2$ seja não vazia é:

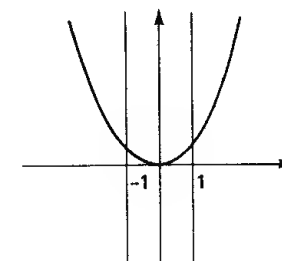
- a) 5
- b) $1/4$
- c) $3/8$
- d) 2
- e) $-\frac{17}{8}$

TA.128 (GV-72) A região hachurada do gráfico

é a solução gráfica do sistema de desigualdades:

- a) $\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} y - |x| \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} y - x^2 \leq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases}$

- e) nenhuma das anteriores



EQUAÇÕES DO 2º GRAU

TA.129 (PUC-70) Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b, c são números reais

- a) tem sempre duas raízes reais.
- b) pode ter uma só raiz imaginária
- c) pode ser uma equação do 1º grau
- d) nunca terá raízes iguais.
- e) nenhuma das anteriores é correta

TA.130 (CESCEM-67) A equação do segundo grau cujas raízes são -1 e 3 é:

- a) $x^2 - x + 3 = 0$
- b) $a(x - 1)(x + 3) = 0, a \neq 0$
- c) $(x + 1)(x + 3) = 0$
- d) $(x - 1)(x - 3) = 0$
- e) nenhuma das respostas acima é correta.

TA.131 (MACK-74) Dada a equação $x + 6 = x^2$, uma equação equivalente à mesma é:

- a) $x(x + 6) = x^3$
- b) $x + 6 + x^2 = x^2 + x + 6$
- c) $x + 6 + \frac{1}{x - 3} = x^2 + \frac{1}{x - 3}$
- d) $3(x + 6) = 3x^2$
- e) todas são equivalentes à equação dada

TA.132 (MACK-77) O número de soluções reais da equação $\frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 4x} = x$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) não sei

TA.133 (FEI-66) O número de soluções reais da equação $5x^4 + x^2 - 3 = 0$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

TA.134 (PUC-76) O trinômio $x^2 + px + q$ onde p e $q \in \mathbb{R}$ torna-se um trinômio quadrado perfeito quando se adiciona o termo constante:

- a) $\frac{p^2}{4} - q$
- b) $\frac{p^2}{4}$
- c) $\frac{p^2}{4a}$
- d) $\frac{p^2}{4p} - q$
- e) $p^2 - 4a q$

TA.135 (PUC-77) Para que a equação $x^2 - ax + \frac{a^2 - b^2}{4} = 0$ tenha raízes reais e iguais é necessário e suficiente que:

- a) $a = b$
- b) $b = 0$
- c) $a = 2b$
- d) $a^2 - b^2 = 0$
- e) $\frac{a + b}{2} = a + 1$

TA.136 (ITA-72) Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valores de p para os quais $f(x) = 0$ possui raiz dupla positiva, são:

- a) $0 < p < 4$
- b) $p = 4$
- c) $p = 0$
- d) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.137 (PUC-75) Seja a função quadrática definida por

$$f(x) = mx^2 - (2m - 2)x + m - 2:$$

- a) f tem duas raízes reais e iguais para $\forall m \in \mathbb{R}^*$
- b) f tem duas raízes reais e iguais para $\begin{cases} m = 2 \\ \text{ou} \\ m = -2 \end{cases}$
- c) f tem duas raízes reais e desiguais para $-2 < m < 2$
- d) f tem duas raízes reais e desiguais para $\forall m \in \mathbb{R}^*$
- e) f tem duas raízes imaginárias para $m > 2$ ou $m < -2$

TA.138 (MACK-74) As raízes da equação $(a - b + c)x^2 + 4(a - b)x + (a - b - c) = 0$ com $a - b + c \neq 0$ são reais:

- a) sempre
- b) somente se $a > b > c$
- c) somente se $a > c > b$
- d) somente se $c > a > b$
- e) nunca

TA.139 (CESCEM-72) O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas; α e β são dois números reais não nulos. Então o trinômio

$$\frac{a}{\alpha} x^2 + \beta b x + \alpha \beta^2 c$$

- e) tem duas raízes reais e distintas ou nenhuma raiz real, conforme o sinal de β .
- b) pode ter uma, duas ou nenhuma raízes reais.
- c) tem duas raízes reais e distintas se α e β forem ambos positivos, nada se podendo afirmar nos demais casos.
- d) tem duas raízes reais e distintas ou nenhuma raiz real, conforme o sinal do produto $\alpha \beta$
- e) tem sempre duas raízes reais e distintas

TA.140 (MACK-74) A equação $kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$ tem raízes racionais para os valores de k pertencentes ao conjunto:

- a) $A = \{1, 2, 4, 5\}$
- b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- c) $C = \{2, 6, 12, 20, 30\}$
- d) $D = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
- e) $E = \{1, 8, 27, 64, 81\}$

TA.141 (CESCEA-72) Considere o seguinte problema: "determinar o número cujo quádruplo excede o seu quadrado de y unidades". Para que valores de y , o problema admite duas soluções reais?

- a) $y < \frac{25}{4}$
- b) $y > \frac{29}{4}$
- c) $y = 6$
- d) $y > 7$
- e) não sei

TA.142 (CESGRANRIO-73) A equação do 2º grau cuja menor raiz é $2 - \sqrt{3}$ e o produto das duas raízes é igual a 1 é expressa por:

- a) $x^2 + x - 4 = 0$
- b) $x^2 + 4x - 1 = 0$
- c) $x^2 - x + 4 = 0$
- d) $x^2 - 4x + 1 = 0$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.143 (CESCEA-77) As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Então o valor de m é:

- a) 4 b) -2 c) $2\sqrt{2}$ d) $-2\sqrt{2}$ e) 0

TA.144 (FEI-68) Sendo a e b as raízes da equação $2x^2 - 5x + m = 3$

então, se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3}$, o valor de m é

- a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{27}{4}$ d) 0 e) nenhuma das anteriores

TA.145 (MACK-76) Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$ o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$ é:

- a) $b^2 - 4ac$ b) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ c) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$
d) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$ e) $\frac{b^2 - 2ac}{2a}$

TA.146 (CESGRANRIO-77) As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Podemos afirmar que:

- a) a diferença entre as duas raízes tem módulo 46
b) a soma das duas raízes tem módulo 2
c) b é positivo
d) o módulo da soma das duas raízes é igual a 94
e) b é negativo

TA.147 (CESGRANRIO-75) Sejam p e q reais; se a equação do segundo grau em x :

$$x^2 + p^2x + q^2 + 1 = 0$$

tem duas raízes reais x_1 e x_2 , então

- a) $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ b) $x_1 + x_2 = p^2$ c) $x_1 + x_2 = q^2 + 1$
d) $x_1 = x_2$ e) $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$

TA.148 (MACK-74) O valor de p , para o qual a soma dos quadrados das raízes de

$$x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$$

tem o menor valor, é:

- a) 2 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3

TA.149 (MACK-74) Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Então o valor de $k \neq 0$ está no intervalo:

- a) $[-4, -2]$ b) $[-1, 1]$ c) $[2, 4]$
d) $[5, 7]$ e) $[-4, 4]$

INEQUAÇÕES

TA.150 (PUC-77) O trinômio $-x^2 + 3x - 4$:

- a) é positivo para todo número real x
b) é negativo para todo número real x
c) muda de sinal quando x percorre o conjunto de todos os números reais
d) é positivo para $1 < x < 4$
e) é positivo para $x < 1$ ou $x > 4$

TA.151 (PUC-77) Para qual dos seguintes conjuntos de valores de m o polinômio $P(x) = mx^2 + 2(m - 2)x + m^2$ é negativo quando $x = 1$?

- a) $1 < m < 2$ b) $-1 < m < 2$ c) $-5 < m < -4$
d) $-3 < m < 2$ e) $0 < m < 1$

TA.152 (CESCEM-75) A expressão $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, é estritamente positiva se x for:

- a) positivo b) não nulo c) igual às raízes d) exterior às raízes
e) interior às raízes

TA.153 (CESGRANRIO-73) O conjunto dos valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a \mathbb{R} é dado por:

- a) $p > -9$ b) $p < 11$ c) $p > 11$ d) $p < -9$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.154 (MACK-74) A desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ é verificada para todo número real x , se e somente se:

- a) $-2 < m < -1$ b) $-1 < m < 0$ c) $0 < m < 1$
d) $1 < m < 2$ e) $2 < m < 3$

TA.155 (EESCUSP-69) O trinômio $kx^2 + 2(k + 1)x - (k + 1)$:

- a) é negativo para todo valor de x e todo $k \neq 0$
b) é negativo para todo valor de x se $k \leq -2$
c) é positivo para todo valor de x e todo $k \neq 0$
d) é negativo para todo valor de x se $-1 < k < -\frac{1}{2}$
e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira

TA.156 (CESCEA-74) Uma condição suficiente para que a expressão $y = +\sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função é que:

- a) $-2 < x < 2$ b) $-2 \leq x \leq 2$ c) $x \leq -2$ ou $x \geq 2$
d) $-1 < x < 3$ e) $x < -2$ ou $x > 0$

TA.157 (CESCEM-71) O domínio da função $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ é:

- a) $x \leq 2$ e $x \geq 3$ b) $x \geq 2$ e $x \leq 3$ c) $x \neq 2$ e $x \neq 3$
d) $x \leq 2$ ou $x \geq 3$ e) $x < 2$ ou $x > 3$

TA.158 (EPUSP-67) Seja A o conjunto dos números inteiros positivos que satisfazem a inequação $(3x - 3)(2x - 5) < (5 - 2x)^2$. Então:

- a) A é vazio b) $A = \{-2; 5/2\}$ c) $A = \{-1; 1\}$
d) $A = \{1; 2\}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TA.159 (GV-70) Dada a parábola $y = x^2 - 4$, quais são os valores de x que produzem imagem maior que 5?

- a) $x > 0$ b) $x < 0$ c) $x < -3$ ou $x > +3$
d) $-3 < x < 3$ e) nenhuma das respostas anteriores

TA.160 (ITA-67) Seja $y = [(ax^2 - 2bx - (a + 2b))^{1/2}]$. Em qual dos casos abaixo y é real e diferente de zero?

- a) $a > 0$, $b > 0$, $-1 < x < \frac{a+b}{a}$
b) $a > 0$, $b < 0$, $x = \frac{a+2b}{a}$
c) $a > 0$, $b = 0$, $-1 < x < 1$
d) $a < 0$, $b = 3a$, $x < -1$
e) $a < 0$, $b = 2a$, $-1 < x < \frac{a+b}{a}$

TA.161 (GV-76) Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, onde x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x , k deverá ser um número tal que:

- a) $k \leq 5$ b) $k = 9$ c) $k = 5$ d) $k \leq 9$ e) $k \geq 9$

TA.162 (GV-76) Para que a função real f dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2bx + c}}$ seja definida para qualquer x real, os números b e c devem ser tais que:

- a) $b^2 < c$ e $b \neq 0$ b) $b^2 > c$ e $c \neq 0$ c) $b^2 < c$
d) $b^2 < c$ e $c \geq 0$ e) $b^2 > c$ e $b > 0$

TA.163 (CESCEA-69) A solução da inequação $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$ é:

- a) $-2 < x < 3$ ou $x > 5$
b) $3 < x < 5$ ou $x < -2$
c) $-2 < x < 5$
d) $x > 6$
e) $x < 3$

TA.164 (CESCEM-75) Os valores de x que satisfazem à inequação:

$$(x^2 - 2x + 8)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16) < 0 \text{ são:}$$

- a) $x < -2$ ou $x > 4$
b) $x < -2$ ou $4 < x < 5$
c) $-4 < x < 2$ ou $x > 4$
d) $-4 < x < 2$ ou $3 < x < 4$
e) $x < -4$ ou $2 < x < 3$ ou $x > 4$

TA.165 (GV-72) O conjunto de todos os números reais para os quais

$$\sqrt{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - x - 2)} \text{ exista é:}$$

- a) $\{-1 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
b) $\{x < -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } 3 < x\}$
c) $\{-1 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$
d) $\{x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } 3 \leq x\}$
e) nenhuma das anteriores

TA.166 (CESGRANRIO-73) As soluções da inequação $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$ são dadas por:

- a) $-1 \leq x < 1$ ou $x > 2$ b) $-1 \leq x \leq 1$ ou $x \geq 2$
c) $x \leq -1$ e $x \geq 2$ d) $x \leq 1$ e $x > 2$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.167 (MACK-76) Tem-se $t + \frac{1}{t} \leq -2$, se e somente se:

- a) $t \leq -1$ b) $t < 0$ c) $t \geq -1$ d) $t > 0$ e) $t \leq 0$

TA.168 (GV-73) Assinale a afirmação verdadeira:

- a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0$
b) $ax^2 + bx + c > 0$, para todo x real $\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$
c) $\frac{x^2 - 1}{2x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
d) $\frac{x - a}{x - b} > 0 \Leftrightarrow (x - a)(x - b) > 0$
e) $\frac{x - a}{x - b} \leq 0 \Leftrightarrow (x - a)(x - b) \leq 0$

TA.169 (GV-74) Para que $y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x^2+4x+3}}$, y real, seja definida, devemos ter:

- a) $-4 \leq x < -1$ ou $1 < x < 2$
b) $-4 \leq x < -3$ ou $-1 < x \leq 2$ ou $x \geq 3$
c) $-3 < x < -1$ ou $2 \leq x \leq 3$
d) $x < 3$ ou $x > -1$
e) $x \leq -4$ ou $-3 < x < -1$ ou $2 \leq x \leq 3$

TA.170 (GV-74) A solução da inequação $\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \geq 0$ é:

- a) $x \geq 0$ b) $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ c) $x \leq 0$ ou $x > 1$
d) $x < 0$ ou $x > 1$ e) $0 \leq x \leq 1$

TA.171 (CESCEM-68) Quais os valores de x que satisfazem à inequação: $\frac{x^2 - 2}{x} \leq 1$

- a) $x \leq -1$ ou $0 < x \leq 2$ b) $-1 \leq x \leq 2$ e $x \neq 0$
c) $x \leq -1$ ou $x \geq 2$ d) qualquer valor de x diferente de zero
e) nenhum valor de x

TA.172 (GV-77) Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. O conjunto solução da inequação

$$\frac{x-3}{x-2} \leq x-1 \text{ é:}$$

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

TA.173 (CESCEA-73) A solução da inequação $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}$ é:

- a) $x \leq 0$ ou $x > 1$ b) $x < -1$ ou $-1 < x \leq 0$ ou $x > 1$
 c) $0 \leq x < 1$ d) $x < -1$ ou $x \geq 0$

TA.174 (CESCEA-73) Se $\frac{x-a}{x^2+1} < \frac{x+a}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, então:

- a) $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4} < a < \frac{\sqrt{2}}{4}$ d) não sei

TA.175 (ITA-67) Em qual dos casos abaixo, vale a desigualdade $\frac{x^2-ax-2a^2}{x^2-(a+2)x+2a} < 0$:

- a) $a < 0$, $x < 2a$ b) $a = 0$, $x > -a$ c) $a > 2$, $2 < x < a$
 d) $a > 2$, $-a < x < 2$ e) $a > 2$, $x > 2a$

TA.176 (CESCEM-6B) A solução do sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases} \text{ é:}$$

- a) $0 < x < 5$ b) $-5 < x \leq -4$ c) $-4 \leq x \leq -2$
 d) $x \leq -2$ e) $x < -5$

TA.177 (CESCEM-70) A solução do sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases} \text{ é:}$$

- a) $0 < x < 2$ b) $-1 < x \leq 0$ e $2 \leq x < 3$
 c) $x < -1$ e $x > 3$ d) nenhum x e) qualquer x

TA.178 (FFCLUSP-66) A solução geral da dupla desigualdade $-2 < x^2 - 3 < \frac{1}{5}$ é:

- a) $1 < |x| < \frac{4}{\sqrt{5}}$
 b) $\frac{-4}{\sqrt{5}} < x < -1$
 c) $1 < x < \frac{4}{\sqrt{5}}$
 d) não há solução
 e) $1 < x < \frac{16}{5}$

TA.179 (ITA-71) O sistema de desigualdades

$$\begin{cases} ax + bx \geq 0 \\ \frac{a}{4}x^2 - bx + (2b - a) < 0 \end{cases} \text{ e}$$

$a > 0$, $b > 0$, $b \neq a$.

Tem solução para:

- a) $x < \frac{-b}{a}$ e $b > a$ b) $x > 2$ e $b < a$
 c) $0 < x < 1$ e $b > \frac{3}{4}a$ d) $x > \frac{4b}{a} - 2$ e $a > 2b$
 e) nenhuma das respostas anteriores

TA.180 (CESCEA-71) O conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

está definida é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ e } x \neq 1\}$
 e) não sei

TA.181 (GV-73) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1} \geq 0\}$ é igual a:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

TA.182 (GV-72) O conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2}$$

resulta num número real, é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ou } x \leq 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

TA.183 (PUC-77) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, então $A \cap B$ é igual a:

- a) $\{2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$
 c) vazio d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

TA.184 (CESCEA-67) Dado o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sabendo-se que $af(\alpha) < 0$, para α um número real, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

- a) o trinômio não tem raízes reais
- b) para concluir a existência de raízes reais é preciso ainda examinar-se $b^2 - 4ac$
- c) o trinômio se anula para dois valores de x , um menor e outro maior que α
- d) α não pertence ao intervalo cujos extremos são as raízes reais
- e) nada disso

TA.185 (GV-70) Dado o trinômio $f(x) = x^2 - 5x + m$ o zero é externo ao intervalo das raízes para:

- a) nenhum m
- b) qualquer m
- c) $m > 0$
- d) $0 < m < \frac{25}{4}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.186 (CESCEA-72) Para que a equação $x^2 + (2-a)x - (3a-1) = 0$ admita duas raízes reais distintas no intervalo $[-2, 3]$ devemos ter:

- a) $-8 \leq a \leq 0$
- b) $a < -8$ ou $a > 0$
- c) $0 < a \leq 1$
- d) $0 < a \leq \frac{16}{6}$
- e) não sei

FUNÇÃO MODULAR

TA.187 (PUC-76) Para definir módulo de um número real x posso dizer que:

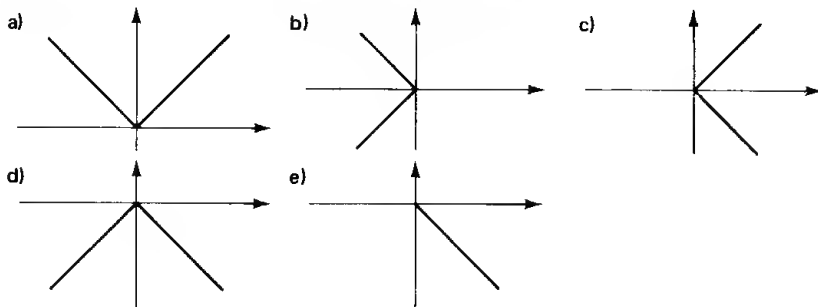
- a) é igual ao valor de x se x é real
- b) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x
- c) é o valor de x tal que $x \in \mathbb{N}$
- d) é oposto do valor de x
- e) é o maior inteiro contido em x

TA.188 (CESGRANRIO-COMCITEC-73) Nos gráficos abaixo os pontos do domínio são marcados no eixo horizontal e os da imagem no eixo vertical. O gráfico que melhor pode representar a função

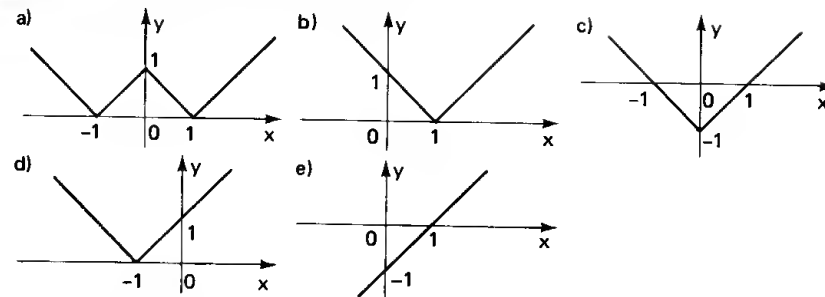
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = -|x|$$

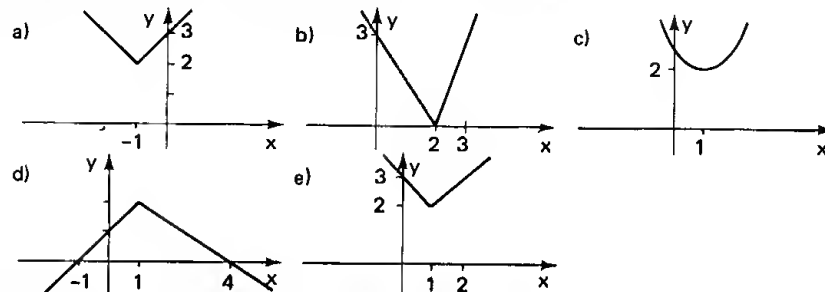
onde \mathbb{R}^+ é o conjunto dos reais não negativos, é:



TA.189 (PUC-77) O esboço do gráfico de $y = |x| - 1$ é:

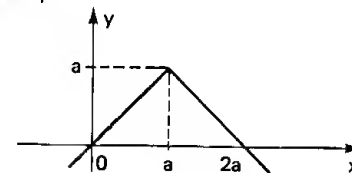


TA.190 (MACK-74) O gráfico da relação $y = |x - 1| + 2$ é:

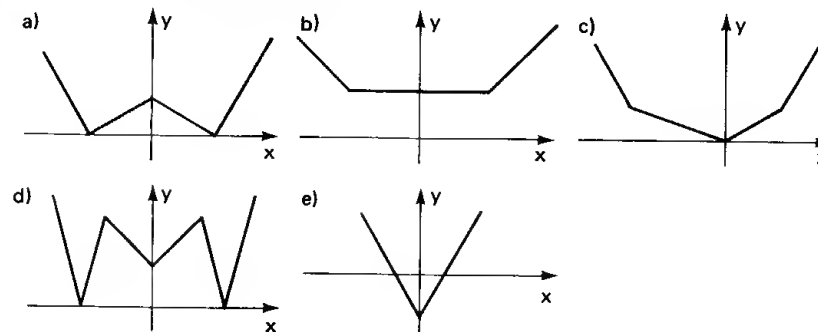


TA.191 (MACK-77) O gráfico ao lado representa a função:

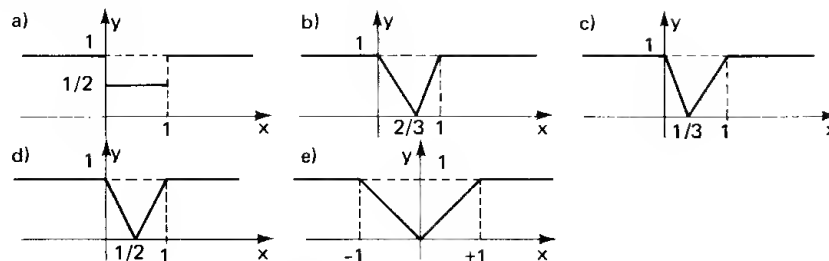
- a) $y = -|x - a| + a$
- b) $y = |x - a| - a$
- c) $y = -|x - a| - a$
- d) $y = \begin{cases} |x| - a & \text{se } x \geq a \\ |x| + a & \text{se } x < a \end{cases}$
- e) não sei



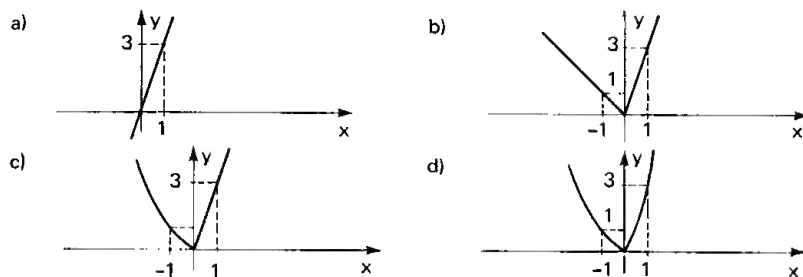
TA.192 (CESCEM-70) O gráfico de $y = |x| - 2$ é:



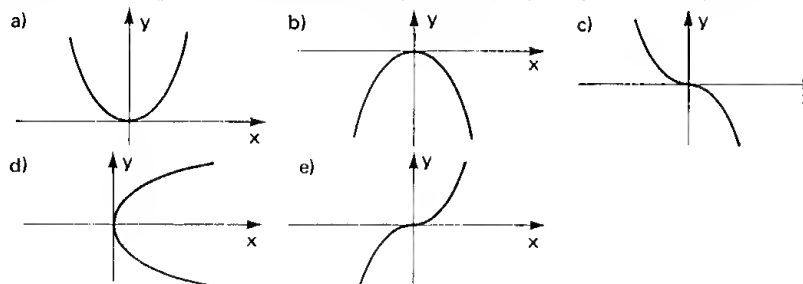
TA.193 (CESCEM-73) O gráfico da função $y = |x - 1| - |x|$ é:



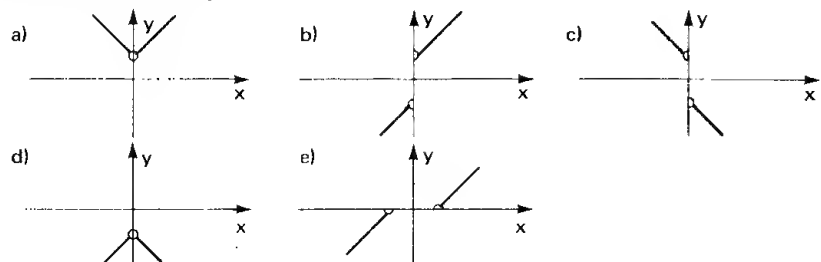
TA.194 (GV-74) O gráfico da equação: $y = 2\sqrt{x^2} + x$ é:



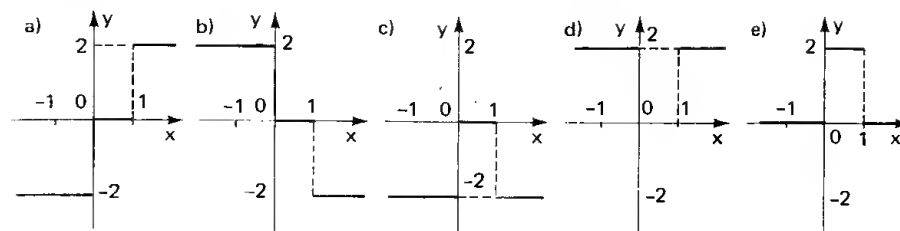
TA.195 (MACK-73) O gráfico cartesiano da função definida por $y = -x|x|$ pode ser



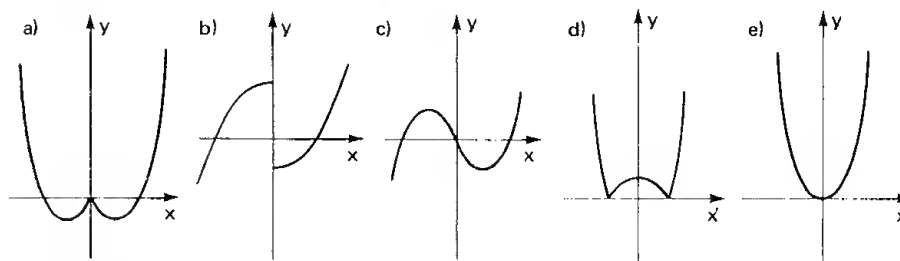
TA.196 (EAESP-75) Seja f uma função definida em \mathbb{R} por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. O seu gráfico é:



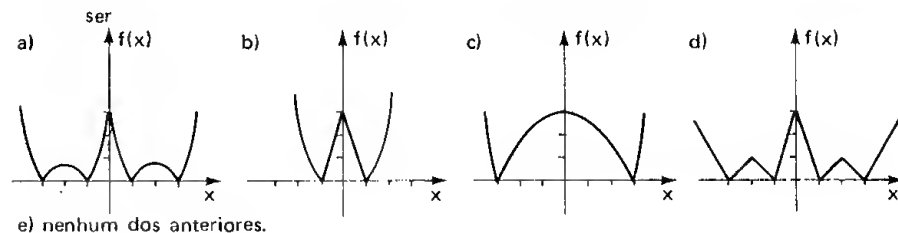
TA.197 (MACK-76) O gráfico, de $g(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1}$ é:



TA.198 (CESCEM-69) A representação gráfica da função $y = x^2 - |x|$ é:



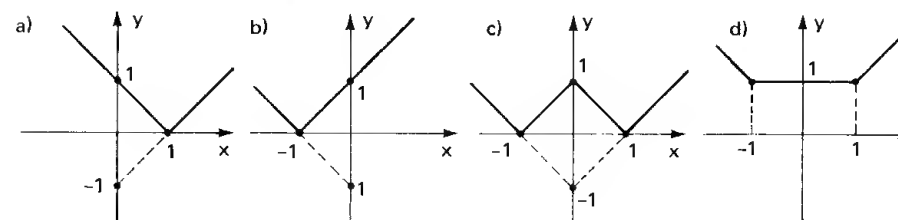
TA.199 (MACK-74) O gráfico cartesiano da função definida por $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ pode



TA.200 (CESCEM-71) Dados dois números reais distintos a e b , podemos definir uma função $f(x)$ que chamaremos "distância ao conjunto $\{a, b\}$ ", da seguinte forma: distância de x ao conjunto $\{a, b\}$ é o menor dos números

$$|x - a|, |x - b|.$$

Se $a = -b = 1$, o gráfico de $f(x)$ é:



e) nenhum dos anteriores.

TA.201 (MACK-76) Seja f uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por

$$f(x) = 2|x - 3| + x - 1$$

O conjunto imagem da função f é:

- a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$ b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$ c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$ e) \mathbb{R}

TA.202 (PUC-77) Dado $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 2\}$, tem-se:

- a) $A \subset \mathbb{N}$ b) $A \subset \mathbb{R}_+$ c) $A \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+$ d) $A \cap \mathbb{Z}_- = A$
e) $A \cap \mathbb{N} = \{2\}$

TA.203 (PUC-74) O conjunto S das soluções da equação

$$|2x - 1| = x - 1 \text{ é:}$$

- a) $S = \{0, \frac{2}{3}\}$ b) $S = \{0, \frac{1}{3}\}$ c) $S = \emptyset$
d) $S = \{0, -1\}$ e) $S = \{0, \frac{4}{5}\}$

TA.204 (GV-72) Seja V o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1 + x.$$

Então:

- a) $V = \emptyset$ b) $V = \mathbb{R}$
c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
e) $V = \{0\}$

TA.205 (CESGRANRIO-77) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = |x^2 - 1|$ têm 2 pontos em comum. A soma das abscissas dos pontos em comum é:

- a) $\sqrt{5}$ b) 1 c) -1 d) $-\sqrt{5}$ e) 0

TA.206 (EPUSP-65) As raízes da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

- a) são positivas b) têm soma 0 c) têm soma 1 d) têm produto 6
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.207 (COMBITEC-COMBIMED-75) A equação

$$|x + 1| - |x| = 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

- a) tem duas soluções distintas cuja soma é 2
b) tem somente as soluções -1 e 0
c) não tem solução
d) tem uma infinidade de soluções
e) tem três soluções distintas cuja soma é 4

TA.208 (FCESP-74) Se $x \in]-\infty, 0]$ então a expressão:

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{x^2} - \sqrt{(4-3x)^2} \text{ vale:}$$

- a) $5x - 1$ b) $3x - 1$ c) $x - 1$ d) $7 - x$ e) $x - 7$

TA.209 (CESCEA-68) Se a e b são dois números reais quaisquer, assinale dentre as afirmações abaixo a que é sempre verdadeira

- a) $|a + b| \geq |a| + |b|$ b) $|a + b| = |a| + |b|$ c) $|a + b| \leq |a| + |b|$
d) $|a| - |b| \geq |a + b|$ e) $|a| + |b| \neq |a + b|$

TA.210 (GV-74) Sejam x e y números reais quaisquer. Assinale a afirmação correta:

- a) $|x + y| \leq \frac{|x| + |y|}{2}$ b) $|x - y| \geq \frac{1}{2} ||x| - |y||$
c) $|x| + |y| > \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $|xy| > |x| \cdot |y|$
e) $|x| + |y| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

TA.211 (CESCRANRIO-75) A interseção dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$ é um intervalo de comprimento

é um intervalo de comprimento

- a) 2 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4

TA.212 (MACK-74) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:

- a) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$ b) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$
c) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$ d) $0 < x < 4$
e) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

TA.213 (CESGRANRIO-73) A função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é menor do que 1 para os valores de x em:

- a) $[-2, -1] \cup [0, 1]$ b) $(-2, -1) \cup (0, 1)$ c) $[-2, -1] \cup (0, 1)$
d) $(-2, -1) \cup [0, 1]$ e) $[-2, 1]$

TA.214 (MACK-77) O conjunto-solução de $|x - 3| < x + 3$ é:

- a) \emptyset b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ c) \mathbb{R} d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
e) não sei

TA.215 (CESCEA-70) O conjunto de todos os x para os quais $|2x - 3| > x$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x < 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

TA.216 (CESGRANRIO-73) O conjunto solução da desigualdade

$$|x + 1| - |x| \leq x + 2$$

- a) $[-3, 0] \cup [1, 73]$ b) $\{x \mid x \leq 0\} \cup [3, 15]$
c) $[-3, 0] \cup \{x \mid x \geq 0\}$ d) $\{x \mid -5 < x < -1\} \cup \{x \mid 1 < x < 17\}$
e) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$

TA.217 (MACK-75) Se $|x^2 - 4| < N$ para todo x tal que $|x - 2| < 1$, então:

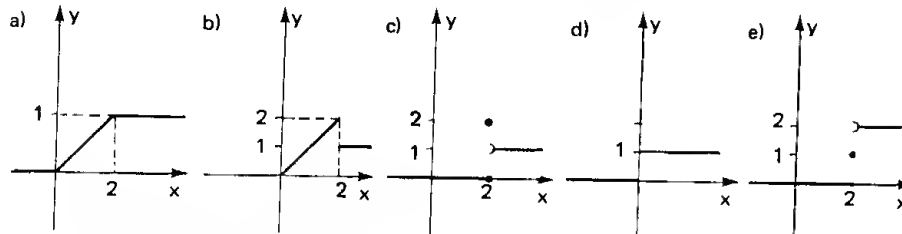
- a) o menor valor possível de N é 3 c) o menor valor possível de N é 5
b) o maior valor possível de N é 3 d) o maior valor possível de N é 5
e) N pode assumir qualquer valor

TA.218 (PUC-70) Qualquer que seja o número real não nulo x , tem-se sempre:

- a) $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ b) $|x + \frac{1}{x}| \leq 10$ c) $|x + \frac{1}{x}| \leq x$
 d) $|x + \frac{1}{x}| < \frac{1}{x}$ e) nenhuma das anteriores.

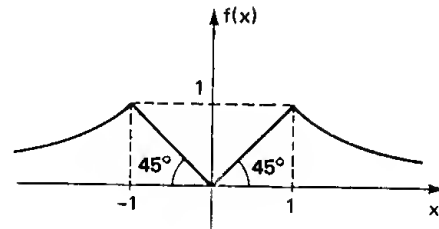
GRÁFICOS

TA.219 (GV-73) O gráfico da função f dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ é:

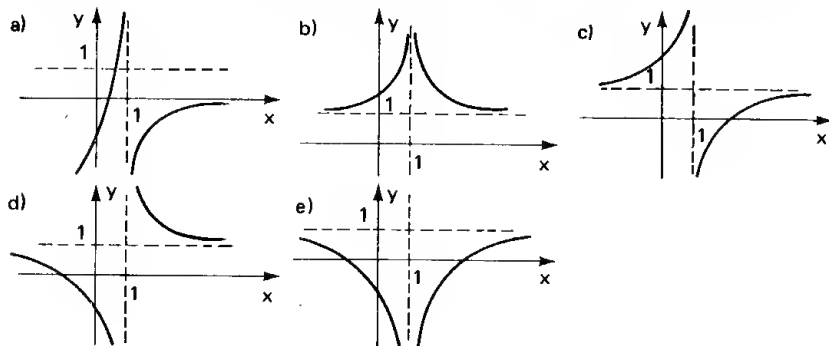


TA.220 (CESCEM-74) A função cujo gráfico melhor se adapta ao da figura é:

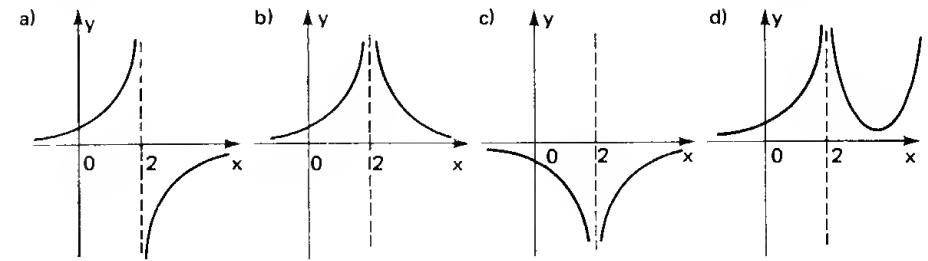
- a) $f(x) = |x|$
 b) $f(x) = |\frac{1}{x}|$
 c) $f(x) = |\min(x; \frac{1}{x})|$
 d) $f(x) = \min(|x|; |\frac{1}{x}|)$
 e) $f(x) = \min(|x^2|; \frac{1}{x^2})$



TA.221 (MACK-73) O gráfico cartesiano da função definida por $y = \frac{x+2}{x-1}$, pode ser

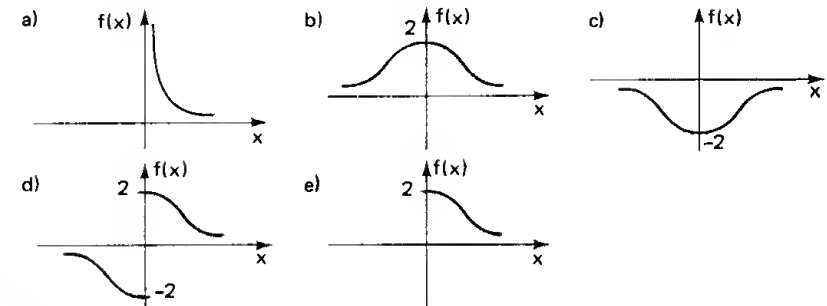


TA.222 (MACK-77) O gráfico da função f dada por $f(x) = \frac{1}{4x - x^2 - 4}$ é, aproximadamente:



e) não sei

TA.223 (MACK-74) O gráfico da função definida por $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ pode ser:



TA.224 (FUVEST-77) As curvas $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = x^2$

- a) interceptam-se em um único ponto de abscissa positiva.
 b) interceptam-se em dois pontos
 c) não se interceptam
 d) interceptam-se em mais de dois pontos
 e) interceptam-se em um único ponto de abscissa negativa

TA.225 (CESCEM-71) As figuras de equações $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{x(x-1)}{x-1}$:

- a) não têm ponto em comum b) têm um único ponto comum
 c) têm exatamente dois pontos comuns
 d) têm exatamente 4 pontos comuns
 e) têm uma infinidade de pontos comuns

TA.226 (FEI-73) Chama-se **ponto fixo** de uma função f um número real x tal que $f(x) = x$.

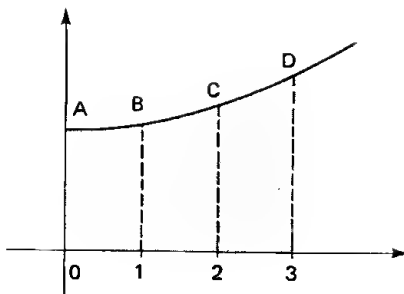
Calcule os pontos fixos da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$:

- a) $x = \pm 1$ b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ c) não tem ponto fixo
 d) tem infinitos pontos fixos

TA.227 (FEI-73) Considere o gráfico da função

$y = 1 + \frac{x^2}{10}$. Deseja-se calcular a área hachurada da figura ao lado. Calcule um valor aproximado dessa área, substituindo os arcos AB, BC e CD por segmentos de reta.

- a) 2,95
b) 4,95
c) 3,95
d) 1,95
e) nenhuma das respostas anteriores



TA.228 (EPUSP-67) Sendo A a área limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$ e pelas retas $x =$

$x = 3$, $y = 0$, tem-se:

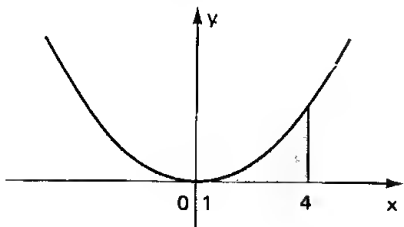
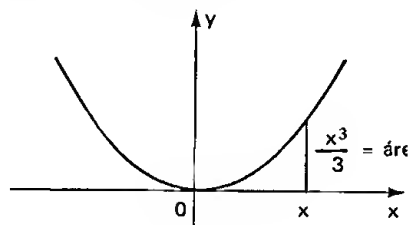
- a) $A < 0,3$ b) $0,3 < A < 0,8$ c) $0,8 < A < 1,5$
d) $1,5 < A < 10$ e) nenhuma das respostas anteriores

TA.229 (CESCEM-74) A função $y = \frac{x^3}{3}$ dá o

valor da área da região compreendida entre a curva $y = x^2$, do ponto de abscissa 0 ao ponto de abscissa x e o eixo das abscissas, conforme indica a figura ao lado:

Nestas condições, a área ao lado indicada vale:

- a) $\frac{64}{3}$
b) 21
c) $\frac{21}{3}$
d) 64
e) $\frac{1}{3}$



TA.230 (CESCEM-74) As regiões do plano definidas por:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 2, \quad x_1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

determinam um quadrilátero, no qual está definida a função $y = x_1 + x_2$. Sabendo-se que o máximo desta função está num dos vértices deste quadrilátero, c seu valor é:

- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 0 e) $-\frac{1}{3}$

FUNÇÕES COMPOSTAS

TA.231 (PUC-77) Sendo $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x - 2$, então $g(f(0))$ é igual a:

- a) 1 b) 3 c) 0 d) 2 e) -1

TA.232 (MACK-75) Dadas as funções f, g e h, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $h(x) = x + 2$, então $((h \circ f) \circ g)(2)$ é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

TA.233 (CESGRANRIO-73) Seja f uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} tal que $f(2) = 7$, $f(9) = 3$, $f(0) = 0$, $f(5) = 16$ e $f(7) = 4$; seja g uma outra função de \mathbb{R} em \mathbb{R} tal que a imagem de cada ponto x do seu domínio seja $2x + 3$. Então, chamando-se h a função composta g o f, tem-se que:

- a) $h(1) = 16$ b) $h(9) = 9$
c) $h(2) = 49$ d) não existe essa função h
e) nada se pode afirmar pois a lei de formação da f não é conhecida

TA.234 (CONSART-75) Se f e g são funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x + 5$, então $g(f(x))$ é:

- a) $3x + 11$ b) $3x^2 + 10$ c) $3x^2 + 11x + 10$ d) $4x + 7$ e) $f\{g(x)\}$

TA.235 (CESGRANRIO-73) Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ então $f(f(x))$ é expressa por:

- a) $\frac{1}{x}$ b) 1 c) x d) $\frac{2x+2}{2x-1}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TA.236 (MACK-75) Dada a aplicação $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, o valor de x tal que $f(x) = f(x+1)$ é:

- a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

TA.237 (MACK-76) Dada a função $f(x) = \frac{x}{x-1}$, a expressão de $f(3x)$, em termos de f(x), é:

- a) $\frac{3f(x)}{3f(x)-1}$ b) $\frac{3f(x)}{3f(x)-3}$ c) $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$ d) $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$
e) $3f(x) - 1$

TA.238 (ITA-77) Considere a função $F(x) = |x^2 - 1|$ definida em \mathbb{R} . Se $F \circ F$ representa a função composta de F com F, então:

- a) $(F \circ F)(x) = x |x^2 - 1|$, para todo x real
b) não existe número real y, tal que $(F \circ F)(y) = y$
c) $F \circ F$ é uma função injetora
d) $(F \circ F)(x) = 0$, apenas para dois valores reais de x
e) nenhuma das anteriores

TA.239 (FEI-68) Dada a função $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, para qualquer número real x tal que $|x| \leq 2$ tem-se:

- a) $f(2x) = 2f(x)$ b) $f(x-2) = f(x) - f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x}$
d) $f(-x) = f(x)$ e) nenhuma das anteriores

TA.240 (CESGRANRIO-76) Considere as funções

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + b \quad x \mapsto x^2$$

onde b é uma constante. Conhecendo-se a composta

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9$$

podemos afirmar que b é um elemento do conjunto:

- a) $(-4, 0)$ b) $(0, 2)$ c) $(2, 4)$ d) $(4, +\infty)$ e) $(-\infty, -4)$

TA.241 (PUC-74) Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, então $(f \circ [f \circ f])(x)$ é igual:

- a) $2x$ b) $3x$ c) $4x$ d) x e) $-x$

TA.242 (CESGRANRIO-73) Sejam dadas as funções

$$m = \left\{ (3, 5), \left(\frac{3}{4}, 0 \right), \left(2, \frac{1}{9} \right), (12, 5), (0, 0) \right\} \quad e$$

$$n = \left\{ (5, 2), (0, 0), \left(6, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{9}, 0 \right) \right\}$$

Considere as afirmações:

- 1) não existe a função $n \circ m$
- 2) não existe a função $m \circ n$
- 3) m é uma função bijetora de \mathbb{R} em \mathbb{R}
- 4) a função $m \circ n \circ m$ não existe
- 5) todas as afirmativas anteriores são falsas

Então:

- a) todas são corretas
b) somente duas são corretas
c) somente uma é correta
d) todas são falsas
e) somente três são corretas

TA.243 (CESCEM-70) Sejam $f(x) = +\sqrt{x-4}$; $g(z) = [f(z)]^2$ e $h(z) = z-4$:

- a) os domínios de $g(z)$ e $h(z)$ coincidem
b) o domínio de $g(z)$ contém estritamente o domínio da $h(z)$
c) o domínio de $f(x)$ não tem pontos em comum com o domínio de $g(z)$
d) qualquer que seja z real, $g(z) = f(z)$
e) nenhuma das anteriores

TA.244 (ITA-74) Sejam A , B e D subconjuntos não vazios do conjunto \mathbb{R} dos números reais. Sejam as funções $f: A \rightarrow B$ ($y = f(x)$), $g: D \rightarrow A$ ($x = g(t)$), e a função composta $(f \circ g): D \rightarrow B$. Então os conjuntos E e K são tais que:

- a) $E \subset A$ e $K \subset D$
b) $E \subset B$ e $K \supset A$
c) $E \supset D$, $D \neq E$ e $K \subset B$
d) $E \subset D$ e $K \subset B$
e) nenhuma das respostas anteriores

TA.245 (MACK-74) Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Então $f \circ g = g \circ f$, se e somente se:

- a) $a = c$ e $b = d$
b) $a = b = c = d$
c) $(a-1) \cdot d = b \cdot (c-1)$
d) $a = c$
e) $a = c$ e $b = -d$

TA.246 (CESGRANRIO-77) Seja $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ uma função tal que o conjunto solução da equação $f(x) = x$ é $\{1, 2\}$. Em relação à função composta $f \circ f$ podemos afirmar que:

- a) para todo x , $(f \circ f)(x) = x$
b) para todo x , $(f \circ f)(x) = f(x)$
c) $(f \circ f)(3) = 3$
d) $(f \circ f)(3) = 1$
e) $(f \circ f)(3) = 2$

TA.247 (MACK-75) Dadas as funções f e g de \mathbb{R} em \mathbb{R} , sendo $g(x) = 4x - 5$ e $f(g(x)) = 13 - 8x$, então:

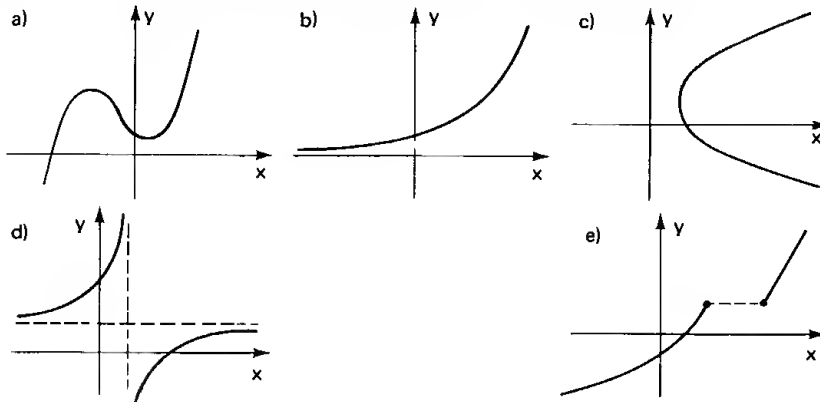
- a) $f(x) = 2 - 3x$ b) $f(x) = 3 - 2x$ c) $f(x) = 2 + 3x$
d) $f(x) = 2x + 3$ e) $f(x) = 5 - 4x$

TA.248 (MACK-73) Sendo $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = x+3$

- a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x+4 & \text{se } x > -2 \end{cases}$
b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{se } x \leq 1 \\ x+4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x+4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{se } x \leq -2 \\ x+4 & \text{se } x > -2 \end{cases}$
e) nenhuma das anteriores

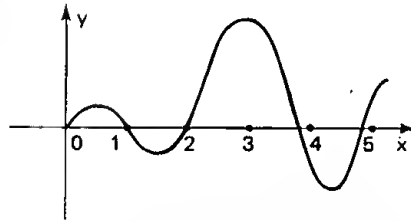
FUNÇÕES INVERSAS

TA.249 (CESCEM-76) Dentre os gráficos abaixo, o que melhor se adapta a uma função bijetora (injetora e sobrejetora) com domínio \mathbb{R} e contradomínio \mathbb{R} é



TA.250 (MACK-75) Ao lado está o gráfico da função f . Um exame deste gráfico nos permite concluir que:

- a) f é injetora
- b) f é periódica
- c) $f(\pi) < 0$
- d) $f(\sqrt{3}) \leq 0$
- e) $f(1) + f(2) = f(3)$



TA.251 (MACK-74) f é uma aplicação de A em B ; $B' \subsetneq B$; f é uma aplicação sobrejetora de A em B' . Podemos afirmar:

- a) f é uma aplicação sobrejetora de A em B
- b) f é uma aplicação injetora de A em B'
- c) a informação dada é contraditória; f não pode ser uma aplicação de A em B'
- d) existe x em A tal que $f(x) \in B$ e $f(x) \in B'$
- e) existe y em B tal que $f(x) = y$ não se verifica para nenhum x de A

TA.252 (MACK-75) A aplicação $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{é:}$$

- a) somente injetora;
- b) somente sobrejetora;
- c) bijetora;
- d) nem injetora e nem sobrejetora;
- e) nenhuma das anteriores.

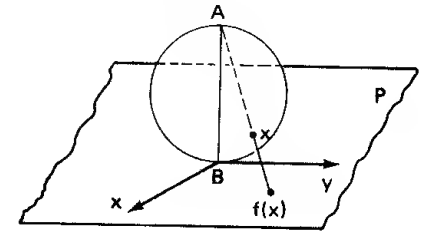
TA.253 (CESGRANRIO-73) Seja AB um diâmetro de uma esfera tangente a um plano P no ponto B . Seja E o conjunto dos pontos da superfície esférica que são distintos de A .

Considere a função

$$f: E \rightarrow P \\ x \mapsto f(x)$$

onde $f(x)$ é o ponto de interseção da reta definida por A e x com o plano P . Dentre as afirmações, a falsa é:

- a) a função é injetora
- b) a função é sobrejetora
- c) a função é bijetora
- d) a função leva circunferências em circunferências
- e) a função leva pontos simétricos em relação ao diâmetro AB em pontos simétricos em relação ao ponto B .



TA.254 (ITA-76) Considere $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:

- a) a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora
- b) g é injetora, mas não é sobrejetora
- c) g é sobrejetora, mas não é injetora
- d) se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a, b, c\}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.255 (MACK-75) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bijetora definida por $f(x) = x^3 + 1$, sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

- a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
- b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$
- c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
- d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$
- e) nenhuma das anteriores

TA.256 (ITA-75) Seja $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ definida em \mathbb{R} . Se g for a função inversa de f , o valor de $e^{g(\frac{7}{25})}$ será:

- a) $\frac{4}{3}$
- b) $\frac{7e}{25}$
- c) $\log_e(\frac{25}{7})$
- d) $e^{\frac{7}{25}}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.257 (CONSART-75) O gráfico de uma função f é o segmento de reta que une os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função inversa de f , então $f^{-1}(2)$ é

- a) 2
- b) 0
- c) $\frac{3}{2}$
- d) $-\frac{3}{2}$
- e) não definida

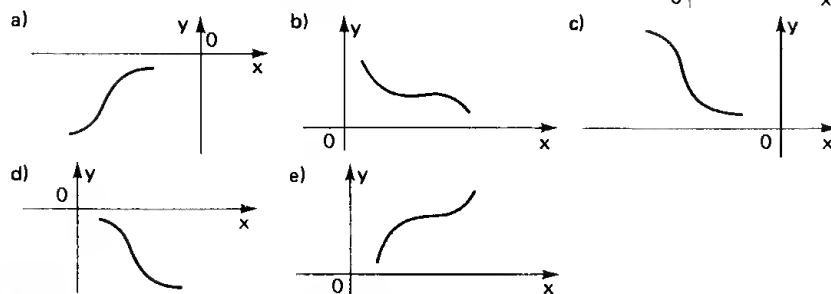
TA.258 (MACK-77) A função f definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ é inversível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. O valor de a é:

- a) 2
- b) -2
- c) 1
- d) -1
- e) não sei

TA.259 (CESGRANRIO-76) Seja $f: x \rightarrow f(x)$ a função cujo gráfico é

O gráfico que mais bem representa a função inversa

$$f^{-1}: x \mapsto f^{-1}(x) \text{ é}$$



TA.260 (ITA-76) Sejam A e B conjuntos infinitos de números naturais.

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ são funções tais que $f(g(x)) = x$, para todo x em B e $g(f(x)) = x$, para todo x em A , então, temos:

- a) existe x_0 em B , tal que $f(y) = x_0$, para todo y em A
- b) existe a função inversa de f
- c) existem x_0 e x_1 em A , tais que $x_0 \neq x_1$ e $f(x_0) = f(x_1)$
- d) existe a em B , tal que $g(f(g(a))) \neq g(a)$
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.261 (CESGRANRIO-77) A imagem da reta $y = 2x$ pela reflexão no eixo dos x a reta de equação

- a) $y = |2x|$
- b) $y = \frac{1}{2}x$
- c) $y = -2x$
- d) $y = 2x$
- e) $y = -\frac{1}{2}x$

TA.262 (CESGRANRIO-73) Sendo $x \geq 4$, o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ é dado por:

- a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
- b) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
- c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$
- d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$
- e) nenhuma das respostas anteriores

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

TA.263 (CESCEM-73) Considere-se o número x dado pela expressão

$$x = |\sqrt{2+x}|$$

Nestas condições,

- a) $x = 2,222 \dots$
- b) $x = \frac{1 \pm 3}{2}$
- c) $x = 2 + \sqrt{2}, 2$
- d) $x = 2$
- e) x não é raiz da equação $x^2 - x - 2 = 0$

TA.264 (PUC-70) O conjunto verdade da equação $\sqrt{4x+1} = 2x-1$ é:

- a) $\{2\}$
- b) $\{0, 2\}$
- c) $\{0\}$
- d) $\{0, \frac{1}{2}\}$
- e) nenhuma das anteriores

TA.265 (GV-75) A equação $\sqrt{x-1} = -\sqrt{x^2-1}$:

- a) tem duas raízes reais
- b) tem três raízes reais
- c) não tem raízes reais
- d) não tem raízes
- e) tem uma única raiz real

TA.266 (PUC-74) O conjunto verdade da equação irracional

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-2} = 2 \text{ é:}$$

- a) $V = \{3\}$
- b) $V = \{3, 9\}$
- c) $V = \{9\}$
- d) $V = \{4\}$
- e) nenhuma das anteriores

TA.267 (FEI-68) Seja V o conjunto dos números reais que são soluções da equação irracional

$$\sqrt{2x} - \sqrt{7+x} = 1$$

- a) $V = \{2, 18\}$
- b) $V = \{2\}$
- c) $V = \{18\}$
- d) $V = \emptyset$
- e) nenhuma das anteriores

TA.268 (MACK-76) Todas as raízes da equação $2\sqrt{x} + 2x^{-\frac{1}{2}} = 5$ estão no intervalo:

- a) $[-2, -\frac{3}{1}]$
- b) $[-\frac{1}{2}, 1]$
- c) $[\frac{1}{5}, \frac{9}{2}]$
- d) $[\frac{5}{4}, 7]$
- e) $[5, 8]$

TA.269 (ITA-73) A respeito da equação, $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$ podemos dizer:

- a) $\frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$ são raízes
- b) A única raiz é $x = 3$
- c) A única raiz é $x = 2 + \sqrt{10}$
- d) tem 2 raízes reais e 2 imaginárias
- e) nenhuma das anteriores

TA.270 (ITA-72) Todas as raízes reais da equação $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+3}} = \frac{3}{2}$ são:

- a) $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$
- b) $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$
- c) $x_1 = 3$ e $x_2 = \sqrt{3}$
- d) não tem raízes reais
- e) nenhuma das respostas anteriores

TA.271 (MACK-74) Se o número x é solução da equação $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$, então x^2 está entre:

- a) 0 e 25
- b) 25 e 55
- c) 55 e 75
- d) 75 e 95
- e) 95 e 105

TA.272 (GV-74) Resolver a desigualdade $1 - 3x > \sqrt{2+x^2} - 3x$:

- a) $x < \frac{3 - \sqrt{41}}{16}$
- b) $x < \frac{1}{3}$
- c) $x < 1$ ou $x > 2$
- d) $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{41}}{16}$
- e) $x < \frac{3 - \sqrt{41}}{16}$ ou $x > \frac{3 + \sqrt{41}}{16}$

RESPOSTAS

TA.1 e	TA.36 e	TA.71 d	TA.106 b
TA.2 d	TA.37 e	TA.72 e	TA.107 e
TA.3 b	TA.38 b	TA.73 e	TA.108 a
TA.4 c	TA.39 b	TA.74 c	TA.109 b
TA.5 c	TA.40 a	TA.75 e	TA.110 a
TA.6 c	TA.41 c	TA.76 e	TA.111 a
TA.7 a	TA.42 b	TA.77 c	TA.112 e
TA.8 b	TA.43 d	TA.78 e	TA.113 a
TA.9 d	TA.44 c	TA.79 b	TA.114 b
TA.10 a	TA.45 e	TA.80 b	TA.115 b
TA.11 a	TA.46 e	TA.81 a	TA.116 d
TA.12 c	TA.47 d	TA.82 d	TA.117 d
TA.13 d	TA.48 a	TA.83 a	TA.118 a
TA.14 e	TA.49 e	TA.84 b	TA.119 d
TA.15 d	TA.50 a	TA.85 b	TA.120 d
TA.16 d	TA.51 b	TA.86 d	TA.121 b
TA.17 d	TA.52 a	TA.87 d	TA.122 b
TA.18 c	TA.53 c	TA.88 e	TA.123 b
TA.19 b	TA.54 e	TA.89 e	TA.124 b
TA.20 a	TA.55 d	TA.90 e	TA.125 c
TA.21 e	TA.56 e	TA.91 e	TA.126 a
TA.22 c	TA.57 a	TA.92 d	TA.127 e
TA.23 e	TA.58 a	TA.93 a	TA.128 d
TA.24 a	TA.59 c	TA.94 b	TA.129 c
TA.25 d	TA.60 a	TA.95 a	TA.130 e
TA.26 a	TA.61 a	TA.96 d	TA.131 d
TA.27 b	TA.62 c	TA.97 b	TA.132 b
TA.28 b	TA.63 c	TA.98 b	TA.133 c
TA.29 b	TA.64 b	TA.99 c	TA.134 a
TA.30 b	TA.65 a	TA.100 e	TA.135 b
TA.31 b	TA.66 b	TA.101 b	TA.136 d
TA.32 c	TA.67 d	TA.102 d	TA.137 d
TA.33 d	TA.68 b	TA.103 b	TA.138 a
TA.34 e	TA.69 c	TA.104 b	TA.139 e
TA.35 e	TA.70 d	TA.105 d	TA.140 c

TA.141 c	TA.174 b	TA.207 d	TA.240 a
TA.142 d	TA.175 d	TA.208 c	TA.241 d
TA.143 c	TA.176 e	TA.209 c	TA.242 c
TA.144 c	TA.177 b	TA.210 b	TA.243 e
TA.145 b	TA.178 a	TA.211 c	TA.244 d
TA.146 a	TA.179 e	TA.212 a	TA.245 c
TA.147 e	TA.180 d	TA.213 b	TA.246 b
TA.148 e	TA.181 a	TA.214 d	TA.247 b
TA.149 d	TA.182 d	TA.215 e	TA.248 a
TA.150 b	TA.183 e	TA.216 c	TA.249 d
TA.151 e	TA.184 c	TA.217 c	TA.250 d
TA.152 e	TA.185 d	TA.218 a	TA.251 e
TA.153 c	TA.186 c	TA.219 a	TA.252 b
TA.154 a	TA.187 b	TA.220 d	TA.253 d
TA.155 d	TA.188 e	TA.221 d	TA.254 a
TA.156 c	TA.189 c	TA.222 c	TA.255 c
TA.157 e	TA.190 e	TA.223 b	TA.256 a
TA.158 d	TA.191 a	TA.224 b	TA.257 b
TA.159 c	TA.192 a	TA.225 b	TA.258 d
TA.160 e	TA.193 d	TA.226 b	TA.259 e
TA.161 e	TA.194 b	TA.227 c	TA.260 b
TA.162 c	TA.195 c	TA.228 c	TA.261 c
TA.163 a	TA.196 b	TA.229 a	TA.262 c
TA.164 d	TA.197 a	TA.230 a	TA.263 d
TA.165 d	TA.198 a	TA.231 e	TA.264 a
TA.166 a	TA.199 a	TA.232 e	TA.265 e
TA.167 b	TA.200 c	TA.233 b	TA.266 a
TA.168 d	TA.201 a	TA.234 a	TA.267 c
TA.169 b	TA.202 e	TA.235 c	TA.268 c
TA.170 c	TA.203 c	TA.236 b	TA.269 e
TA.171 a	TA.204 d	TA.237 d	TA.270 e
TA.172 b	TA.205 a	TA.238 e	TA.271 d
TA.173 b	TA.206 b	TA.239 d	TA.272 a

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Vol 1 – Conjuntos e Funções

1. noções de lógica, 2. conjuntos, 3. conjuntos numéricos, 4. relações, 5. funções, 6. funções do 1º grau, 7. funções do 2º grau, 8. função modular, 9. função composta e função inversa.

Vol 2 – Logaritmos

1. potências, 2. função exponencial, 3. função logarítmica, 4. equações e inequações logarítmicas, 5. logaritmos decimais.

Vol 3 – Trigonometria

1. ciclo trigonométrico, 2. funções circulares, 3. principais identidades, 4. transformações, 5. equações, 6. funções circulares inversas, 7. inequações, 8. triângulos.

Vol 4 – Seqüências, Matrizes, Determinantes, Sistemas

1. seqüências e progressões, 2. matrizes, 3. propriedades dos determinantes, 4. sistemas lineares: método do escalonamento.

Vol 5 – Combinatória, Binômio, Probabilidade

1. princípios fundamentais da contagem, 2. arranjos, 3. permutações, 4. combinações, 5. desenvolvimento binomial, 6. probabilidade em espaço amostral finito.

Vol 6 – Complexos, Polinômios, Equações

1. números complexos, 2. polinômios, 3. equações polinomiais, 4. transformações, 5. raízes múltiplas.

Vol 7 – Geometria Analítica

1. o ponto, 2. a reta, 3. a circunferência, 4. as cônicas, 5. lugares geométricos.

Vol 8 – Limites, Derivadas, Noções de Integral

1. definição de limite, 2. propriedades operatórias, 3. definição de derivadas, 4. cálculo de derivadas, 5. estudo de funções, 6. noções de integral definida.

Vol 9 – Geometria Plana

1. triângulos, 2. paralelismo, 3. perpendicularismo, 4. circunferência, 5. semelhança, 6. relações métricas, 7. áreas das figuras planas.

Vol 10 – Geometria Espacial

1. Geometria de posição: paralelismo, perpendicularismo, diedros, triedros, poliedros; 2. Geometria Métrica: prisma, pirâmide, cilindro, cone, sólidos semelhantes, superfície e sólidos de revolução, sólidos esféricos.